



Determinación del Campo de Vientos a partir de mensajes ADS-B

Alumno: Javier García-Heras Carretero

Director: Francisco Javier Sáez Nieto

Tutores: Rosa María Arnaldo Valdés y Eduardo García González

ÍNDICE GENERAL

1. INTRODUCCIÓN	10
1.1. OBJETO.....	10
1.2. ALCANCE	10
1.3. MÉTODO EMPLEADO.....	11
1.3.1. <i>Método de Galerkin (EFG method)</i>	11
1.3.1.1. Interpolación por Mínimos Cuadrados Móviles	12
1.3.1.2. Función de Ponderación.....	15
1.4. CONCLUSIONES	21
1.5. TRABAJOS FUTUROS	23
2. ESTADO DEL ARTE.....	25
3. DISEÑO MODELO DE CAMPO DE VIENTOS.....	30
3.1. RESOLUCIÓN MEDIANTE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS	30
3.1.1. <i>Ejemplo 1</i>	33
3.1.2. <i>Ejemplo 2</i>	35
3.1.3. <i>Ejemplo 3</i>	37
3.1.4. <i>Ejemplo 4</i>	39
3.1.5. <i>Conclusión</i>	41
3.2. RESOLUCIÓN MEDIANTE EL MÉTODO DE GALERKIN	41
3.2.1. <i>Imponiendo velocidad en los nodos</i>	42
3.2.1.1. Conclusión	75
3.2.2. <i>Imponiendo presión en los nodos.</i>	75
3.2.2.1. Conclusión.....	91
4. REFERENCIAS	92
5. ACRÓNIMOS	94
ANEXO 1 MENSAJES ADS-B	96
ANEXO 2 CAMPOS DE VIENTOS REALES.....	103
ANEXO 3 PROGRAMA MATLAB MODELO DE VIENTO IMPONIENDO LA VELOCIDAD DEL VIENTO EN LOS NODOS	108
ANEXO 4 PROGRAMA MATLAB MODELO DE VIENTO IMPONIENDO LA PRESIÓN EN LOS NODOS.....	115

ÍNDICE DE ECUACIONES

(Ec. 1).....	10
(Ec. 2).....	10
(Ec. 3).....	11
(Ec. 4).....	11
(Ec. 5).....	12
(Ec. 6).....	12
(Ec. 7).....	13
(Ec. 8).....	13
(Ec. 9).....	13
(Ec. 10).....	13
(Ec. 11).....	13
(Ec. 12).....	14
(Ec. 13).....	14
(Ec. 14).....	14
(Ec. 15).....	14
(Ec. 16).....	15
(Ec. 17).....	15
(Ec. 18).....	15
(Ec. 19).....	15
(Ec. 20).....	16
(Ec. 21).....	17
(Ec. 22).....	17
(Ec. 23).....	18
(Ec. 24).....	19
(Ec. 25).....	20
(Ec. 26).....	24
(Ec. 27).....	24
(Ec. 28).....	26
(Ec. 29).....	28
(Ec. 30).....	28
(Ec. 31).....	28
(Ec. 32).....	28
(Ec. 33).....	28
(Ec. 34).....	30
(Ec. 35).....	30
(Ec. 36).....	31
(Ec. 37).....	31
(Ec. 38).....	31
(Ec. 39).....	31
(Ec. 40).....	31

(Ec. 41).....	32
(Ec. 42).....	32
(Ec. 43).....	32
(Ec. 44).....	33
(Ec. 45).....	33
(Ec. 46).....	35
(Ec. 47).....	35
(Ec. 48).....	37
(Ec. 49).....	37
(Ec. 50).....	39
(Ec. 51).....	40
(Ec. 52).....	42
(Ec. 53).....	42
(Ec. 54).....	42
(Ec. 55).....	42
(Ec. 56).....	47
(Ec. 57).....	47
(Ec. 58).....	47
(Ec. 59).....	47
(Ec. 60).....	58
(Ec. 61).....	58
(Ec. 62).....	58
(Ec. 63).....	59
(Ec. 64).....	59
(Ec. 65).....	59
(Ec. 66).....	59
(Ec. 67).....	76
(Ec. 68).....	76
(Ec. 69).....	76
(Ec. 70).....	77
(Ec. 71).....	78
(Ec. 72).....	78
(Ec. 73).....	78
(Ec. 74).....	78
(Ec. 75).....	78
(Ec. 76).....	79
(Ec. 77).....	79
(Ec. 78).....	79
(Ec. 79).....	80
(Ec. 80).....	80
(Ec. 81).....	80
(Ec. 82).....	80
(Ec. 83).....	80
(Ec. 84).....	81
(Ec. 85).....	81

(Ec. 86).....	81
(Ec. 87).....	81
(Ec. 88).....	81
(Ec. 89).....	82
(Ec. 90).....	82
(Ec. 91).....	82

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Función Fracción Racional.....	16
Figura 2: Función Triangular.....	17
Figura 3: Función B-Spline Cuártica.....	18
Figura 4: Función Spline Cúbica.....	19
Figura 5: Función Exponencial.....	20
Figura 6: Función Gauss Truncada	20
Figura 7: Funciones de Ponderación	21
Figura 8: Escenario real espacio aéreo.....	23
Figura 9: Campo de vientos muestra	32
Figura 10: Modulo de la velocidad Ejemplo 1.....	34
Figura 11: Campo de vientos Ejemplo 1.....	34
Figura 12: Modulo campo velocidad del viento Ejemplo 2.....	36
Figura 13: Vectores campo de velocidad del viento Ejemplo 2	36
Figura 14: Modulo de la velocidad campo de vientos Ejemplo 3	38
Figura 15: Vectores campo velocidades del viento Ejemplo 3.....	38
Figura 16: Módulo de la velocidad campo de vientos Ejemplo 4	40
Figura 17: Vectores campo de viento Ejemplo 4	41
Figura 18: Triángulo de Pascal. [21] página 18.....	44
Figura 19: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento	48
Figura 20: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento	48
Figura 21: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento	49
Figura 22: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento	49
Figura 23: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento	50
Figura 24: Taza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento.....	51
Figura 25: Taza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando la última fila (tanto de la parte superior como inferior como laterales).....	51
Figura 26: Taza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando las dos últimas filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)	52
Figura 27: Taza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando las tres últimas filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)	52

Figura 28: Ejemplo modelo campo de vientos turbulento para PHI grado 5 con 30 puntos de observación. Rojo (Viento estimado), Azul (Viento medido). Zona Verde (Eliminando 1 fila), zona morada (Eliminando 2 filas), zona naranja (Eliminando 3 filas).....	52
Figura 29: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar	53
Figura 30: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar	54
Figura 31: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar	54
Figura 32: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar	55
Figura 33: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más laminar	55
Figura 34: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar.....	56
Figura 35: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando la última fila (tanto de la parte superior, como inferior, como laterales).....	57
Figura 36: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando las últimas dos filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)	57
Figura 37: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando las últimas tres filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)	57
Figura 38: Ejemplo modelo campo de vientos laminar para PHI grado 5 con 30 puntos de observación. Rojo (Viento estimado), Azul (Viento medido). Zona Verde (Eliminando 1 fila), zona morada (Eliminando 2 filas), zona naranja (Eliminando 3 filas).....	58
Figura 39: DOP empleando una PHI de grado 3 con 35 puntos de observación	60
Figura 40: DOP empleando una PHI de grado 5 con 35 puntos de observación	60
Figura 41: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento	61
Figura 42: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento	62
Figura 43: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento	62
Figura 44: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento	63
Figura 45: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento	63
Figura 46: DOP medio en función del grado de PHI y de los puntos de observación para un campo de vientos más turbulento	64
Figura 47: DOP empleando una PHI de grado 3 con 35 puntos de observación campo de vientos más laminar.....	64
Figura 48: DOP empleando una PHI de grado 5 con 35 puntos de observación campo de vientos más laminar.....	65

Figura 49: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar	66
Figura 50: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar	66
Figura 51: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar	67
Figura 52: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar	67
Figura 53: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento	68
Figura 54: DOP medio en función del grado de PHI y de los puntos de observación para un campo de vientos más laminar	68
Figura 55: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento	69
Figura 56: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento	70
Figura 57: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento	70
Figura 58: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento	71
Figura 59: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento	71
Figura 60: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar	72
Figura 61: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar	73
Figura 62: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar	73
Figura 63: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar	74
Figura 64: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más laminar	74
Figura 65: Presión ISA en función de la altura	76
Figura 66: Contribución de la aceleración centrífuga en la gravedad.....	77
Figura 67: Derivada de la función de ponderación con respecto a dl.....	82
Figura 68: Presión Real, campo de vientos más turbulento	83
Figura 69: Isobaras-Vectores campo de vientos más turbulento	84
Figura 70: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior derecha) con grado 3 presión para un campo de velocidades más turbulento	85
Figura 71: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más turbulento	86
Figura 72: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 3 presión para un campo de velocidades más turbulento	86
Figura 73: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más turbulento	87

Figura 74: Presión Real, campo de vientos más laminar	87
Figura 75: Isobaras-Vectores campo de vientos más laminar	88
Figura 76: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior derecha) con grado 3 presión para un campo de velocidades más laminar.....	89
Figura 77: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más laminar.....	90
Figura 78: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 3 presión para un campo de velocidades más laminar.....	90
Figura 79: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más laminar.....	91
Figura 80: ADS-B. [13]	97
Figura 81: Estructura formatos 17 y 18, enlace descendente.[17]	98
Figura 82: Campo de vientos Real más Turbulento	103
Figura 83: Campo de vientos Real más Laminar	105

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Objeto

El futuro proyecto SESAR (Europa)/NextGen program (USA) establece la necesidad de tener un control 4D (x,y,z,t) del espacio aéreo, por lo tanto es de vital importancia para tal fin el conocimiento a tiempo real de la velocidad del viento.

Se pretenderá a causa de dichas necesidades, el cálculo de la estimación de las componentes del vector velocidad dentro de un dominio Ω (por ejemplo: área terminal de Madrid, cuya extensión esta caracterizada por unos 60000km²), para dicho desarrollo se hará uso de los valores puntuales del vector velocidad del viento conocidos a través de los mensajes ADS-B transmitidos por las aeronaves circundantes.

1.2. Alcance

En el presente proyecto se modelarán las componentes de la velocidad, teniendo en cuenta en primer lugar que la velocidad del viento permite el uso de la **condición de fluido incompresible** ya que prácticamente en todos los casos es menor de los 100Km/h, y por lo tanto la densidad del aire puede considerarse constante en el dominio o volumen de análisis. Tras aplicar dicha condición a la ecuación de continuidad de la mecánica de fluidos se obtiene la (Ec. 1) [10].

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \xrightarrow{\rho=cte} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{Ec. 1})$$

Así mismo se hará uso de la hipótesis de **equilibrio hidrostático**, a través de la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección z . se deduce que en ausencia de movimientos atmosféricos, la fuerza de la gravedad está equilibrada por la componente vertical de la fuerza del gradiente de presión. Suele ser una buena aproximación de la dependencia vertical del campo de presión en la atmósfera real para modelos mesoescala¹ y de mayor orden.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (\text{Ec. 2})$$

¹ Definida en el glosario de “Meteorology (Huschke 1959)” como: la rama de la meteorología centrada en el estudio de fenómenos atmosféricos a mayor escala que la micrometeorología, pero menor que la escala sinóptica meteorológica. Sus dimensiones van de cerca de 9km a varios centenares de kilómetros.

Se hará uso de un modelo meteorológico numérico de tipo *diagnósticos*, ya que se proporcionarán datos mediante interpolación y extrapolación de medidas realizadas en puntos de ese dominio Ω , en el no hay dependencia del tiempo, **problema estacionario**.

Se empleará también la hipótesis de **viento geostrófico**, definiéndose como el viento resultante del equilibrio entre la aceleración de coriolis y la fuerza del gradiente horizontal de presión, tiene una dirección paralela a las isobaras² o isohipsas. Basándose el mismo en los siguientes aspectos, según la referencia [11]:

- La corriente se supone rectilínea, es decir, las isobaras son líneas rectas, y al no haber curvatura no existe aceleración centrípeta.
- No hay aceleración, la velocidad es constante.
- El movimiento se supone libre de fricción.

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right] + \rho f_{m_i} \quad (\text{Ec. 3})$$

La (Ec. 3) representa la ecuación general de cantidad de movimiento (véase referencia [10]). Aplicando la ecuación general representada en (Ec. 3) a las hipótesis del viento geostrófico explicados con anterioridad se llega a **ecuación general del viento geostrófico** (véase (Ec. 4)).

$$\begin{aligned} fv_i &\approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ -fv_j &\approx -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 4})$$

Donde:

- $f = 2\Omega \sin \phi$. Siendo Ω la velocidad angular de la Tierra igual a $73 \cdot 10^{-6} \text{ rad/seg}$.
- ρ : Densidad en kg/m^3 .

1.3. Método Empleado

Se han desarrollado diversos métodos para reproducir el campo de vientos, entre ellos se ha considerado el método de Galerkin libre de malla. Debido a que este método permite la estimación de una magnitud, conocido el valor de la misma, en determinados puntos (nodos) del dominio, hecho que resulta de especial interés en la problemática presente, ya que los mensajes ADS-B pueden proporcionar datos de la velocidad del viento, siendo este un dato puntual.

1.3.1. Método de Galerkin (EFG method)

El método EFG fue desarrollado por Belytschko en 1994 basado en DEM de Nayroles en 1992 (véase referencia [8]). Se trata de un método sin malla, en el que unas funciones aproximantes

² Isobaras: Línea que en un mapa atmosférico representa puntos que presentan la misma presión atmosférica. [11]

polinomiales son ajustadas al valor de la función a estimar en unos puntos de observación de la región de estudio (nodos), mediante una aproximación de mínimos cuadrados móviles (MLS) empleando unas funciones de ponderación que proporcionarán más peso a los puntos de observación más próximos. Será conveniente para conservar el carácter local de la aproximación que las funciones de ponderación se anulen a una cierta distancia entre los nodos y el punto en el que se está determinando la estimación.

Aunque el método de Galerkin se considera sin malla en lo que respecta al cálculo de la función de forma o función de aproximación, necesita un mallado si se quiere resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales. Es debido a que la evaluación de la integral débil necesita la división del dominio a menos que se utilice cuadratura nodal. [8]

La idea principal del método EFG es remplazar la interpolación por partes típica del método de elementos finitos (FEM), por un ajuste local por mínimos cuadrados. La función resultante es más regular que la función de MEF ya que los coeficientes discontinuos se reemplazan por funciones de ponderación continuas. [7]

La principal desventaja del método de Galerkin es que aplicando MLS la función interpolante no pasa por los datos debido a que la función de interpolación no es igual a la unidad en los nodos, ya que si así fuera la función de ponderación sería singular.

1.3.1.1. Interpolación por Mínimos Cuadrados Móviles

La interpolación MLS de $u^h(x)$ de la función $u(x)$ está definida en el dominio Ω aproximada localmente en torno a punto \vec{x} por la (Ec. 5).

$$u^h(\vec{x}) = \sum_j^m p_j(\vec{x}) \cdot a_j(\vec{x}) = \underline{p}^T(\vec{x}) \cdot \underline{a}(\vec{x}) \quad (\text{Ec. 5})$$

Donde:

- $\underline{p}(\vec{x})_{m \times 1}$: vector de funciones base. $\underline{p}^T(\vec{x}) = \underline{p}^T(x, y) = \{1, x, y, xy, x^2, y^2, \dots, x^r, y^r\}$
- m es el número de términos del vector de funciones base $\underline{p}(x)$.
- $\underline{a}(x)_{m \times 1}$ es el vector de coeficientes. $\underline{a}(x) = \{a_0(x), a_1(x), \dots, a_m(x)\}^T$. Son tales que hacen mínima la función de costes $J(\vec{x})$, dependiendo ésta de la diferencia entre la aproximación local $u^h(x)$ y la función $u(x)$. (Véase (Ec. 6))

$$\begin{aligned} J(\vec{x})_{1 \times 1} &= \sum_{l=1}^n w(\vec{d}_l) \cdot \left(\underline{p}^T(\vec{x}, \vec{x}_l) \cdot \underline{a}(\vec{x}) - u(\vec{x}_l) \right)^2 \\ &= \sum_{l=1}^n w(\vec{x} - \vec{x}_l) \cdot \left(\underline{p}^T(\vec{x}) \cdot \underline{a}(\vec{x}) - u(\vec{x}_l) \right)^2 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 6})$$

En la (Ec. 6):

- $w(\vec{d}_I) = w(\vec{x} - \vec{x}_I)$: Función de ponderación, a la que como se ha mencionado con anterioridad se ha de aplicar un dominio de influencia.
- $\vec{x}_I (I = 1, 2, \dots, n)$: son los nodos que están dentro del dominio de influencia del punto \vec{x} .

Reescribiendo la ecuación en forma matricial se obtiene:

$$J(\vec{x})_{1 \times 1} = \left(\underbrace{P \cdot a - u}_{\underline{u}^h} \right)^T \underline{W}(\vec{x}) \left(\underbrace{P \cdot a - u}_{\underline{u}^h} \right) \quad (\text{Ec. 7})$$

Donde:

$$\underline{u}_{1 \times n}^T = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \quad (\text{Ec. 8})$$

$$\underline{u}_{1 \times n}^{hT} = \{u_1^h, u_2^h, \dots, u_n^h\}^T \quad (\text{Ec. 9})$$

$$\underline{P}_{n \times m} = \begin{bmatrix} p_1(\vec{x}_1) & p_2(\vec{x}_1) & \dots & p_m(\vec{x}_1) \\ p_1(\vec{x}_2) & p_2(\vec{x}_2) & \dots & p_m(\vec{x}_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(\vec{x}_n) & p_2(\vec{x}_n) & \dots & p_m(\vec{x}_n) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 10})$$

$$\underline{W}(\vec{x})_{n \times n} = \begin{bmatrix} w(\vec{x} - \vec{x}_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(\vec{x} - \vec{x}_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w(\vec{x} - \vec{x}_n) \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 11})$$

La (Ec. 8) nos representa que u es un vector fila en el que cada uno de los elementos es el valor de la magnitud en cada uno de los nodos. Mientras que la (Ec. 10) aparecen por filas el vector $p(\vec{x})$ (función de monomios aproximantes) evaluado en cada uno de los nodos. Finalmente la matriz definida en la (Ec. 11) es una matriz diagonal en el que en cada uno de sus elementos se tiene la función de ponderación respecto al nodo (véase apartado 1.3.1.2).

Como se ha mencionado con anterioridad para el cálculo de los coeficientes $a_i(\vec{x})$ es necesario minimizar la diferencia entre la aproximación local y la función (véase (Ec. 6)). Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial J(\vec{x})}{\partial \underline{a}} &= 0 = \frac{\partial}{\partial \underline{a}} \left[\left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right)^T \underline{W}(\vec{x}) \left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right) \right] \\
&= \frac{\partial \left(\left(\underline{P} \cdot \underline{a} \right)^T - \underline{u}^T \right)}{\partial \underline{a}} \left[\underline{W}(\vec{x}) \left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right) \right] + \left[\left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right)^T \underline{W}(\vec{x}) \right] \frac{\partial \left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right)}{\partial \underline{a}} \quad (\text{Ec. 12}) \\
&= \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right) + \left(\underline{P} \cdot \underline{a} - \underline{u} \right)^T \underline{W}(\vec{x}) \underline{P} \xrightarrow{\underline{R}^T \underline{d} \cdot \underline{S} = \underline{S}^T \cdot \underline{d} \cdot \underline{R}} \\
&\rightarrow \boxed{\underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \underline{P} \cdot \underline{a}(\vec{x}) - \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \underline{u} + \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \left(\underline{P} \cdot \underline{a} \right) - \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \underline{u} = 0}
\end{aligned}$$

Por lo se puede concluir (véase (Ec. 13)) reescribiendo y simplificando la ecuación (Ec. 12), en donde:

- $\underline{A}(\vec{x})_{m \times m} = \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x}) \underline{P}$
- $\underline{B}(\vec{x})_{m \times n} = \underline{P}^T \underline{W}(\vec{x})$

$$\begin{aligned}
&\underline{A}(\vec{x}) \cdot \underline{a}(\vec{x}) - \underline{B}(\vec{x}) \underline{u} = 0 \\
&\rightarrow \boxed{\underline{a}(\vec{x})_{m \times 1} = \underline{A}(\vec{x})^{-1} \underline{B}(\vec{x}) \underline{u}} \quad (\text{Ec. 13})
\end{aligned}$$

Seguidamente se despeja las constantes $a_i(x)$ (para $i=1,2,\dots,m$) y se introduce en la ecuación (Ec. 5) resultando la (Ec. 14) como la función aproximante tras realizar el método MLS.

$$u^h(\vec{x}) = \sum_I^n \sum_j^m p_j(\vec{x}) \cdot \underbrace{\left(\underline{A}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{B}(\vec{x}) \right)_{ji}}_{a(\vec{x})} \cdot u_I = \sum_I^n \phi_I(\vec{x}) \cdot u_I \quad (\text{Ec. 14})$$

Donde

$$\phi_I(\vec{x}) \text{ es la función de forma, siendo: } \phi_I(\vec{x}) = \sum_j^m p_j(\vec{x}) \cdot \left(\underline{A}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{B}(\vec{x}) \right)_{ji} .$$

Finalmente se ha de concluir que es posible la determinación de la derivada parcial de la función aproximante (Ec. 14).

$$\frac{\partial u^h(\vec{x})}{\partial x_i} = \sum_I^n \frac{\partial \phi_I(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot u_I \quad (\text{Ec. 15})$$

Por lo tanto, la derivada de la función aproximante se reduce a derivar la función de forma. (Véase ecuación (Ec. 16))

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_i(\vec{x})}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sum_j^m p_j(\vec{x}) \cdot (\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{B}}(\vec{x}))_{ji}}{\partial x_i} \\
&= \sum_j^m \frac{\partial p_j(\vec{x})}{\partial x_i} (\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{B}}(\vec{x}))_{ji} \\
&\quad + p_j(\vec{x}) \left[\left(\frac{\partial \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot \underline{\underline{B}}(\vec{x}) \right)_{ji} + \left(\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{B}}(\vec{x})}{\partial x_i} \right)_{ji} \right]
\end{aligned} \tag{Ec. 16}$$

Cabe destacar que la derivada de la matriz inversa de la matriz $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x})}{\partial x_i} = -\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{x})}{\partial x_i} \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \tag{Ec. 17}$$

La afirmación anterior se puede demostrar de una manera sencilla. Supóngase que $a_{ij}(\vec{x})$ son los distintos elementos de la matriz $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ y $b_{jk}(\vec{x})$ los correspondientes a $\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x})$, entonces para cada x se tiene:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(\vec{x}) \cdot b_{jk}(\vec{x}) = \delta_i^k \tag{Ec. 18}$$

Donde n es el orden de la matriz $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ y delta es la delta de Kronecker³. Derivando la (Ec. 18) e identificando términos para transformarlo de nuevo en forma matricial, se llega a la demostración deseada de la ecuación de la derivada de la función inversa (Ec. 17):

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{ij}(\vec{x})}{\partial x_i} \cdot b_{jk}(\vec{x}) + a_{ij}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial b_{jk}(\vec{x})}{\partial x_i} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{x})}{\partial x_i} \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) = -\underline{\underline{A}}(\vec{x}) \frac{\partial \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x})}{\partial x_i}} \tag{Ec. 19}$$

1.3.1.2. Función de Ponderación

Uno de los puntos más importantes de este modelo es el diseño de la función de ponderación. Consiste fundamentalmente en dar mayor peso a los nodos que se encuentren más cerca del punto en el que se esté realizando la estimación, además debe eliminar aquellos nodos que se encuentren fuera del radio de influencia, ya que su inclusión al tratarse de una aproximación local podría alterar los resultados de la misma.

Tal y como enuncia Cuesta (Referencia [7]) de acuerdo con lo que publicó Monaghan en 1982 (Referencia [12]), las funciones de ponderación han de satisfacer las siguientes 5 condiciones:

1. **Positiva:** $w(\vec{x} - \vec{x}_i) > 0$ dentro del dominio de validez Ω_i .

³ Delta de Kronecker (δ_{ij} ó δ_i^j): Función caracterizada por valer 1 cuando $i = j$ y cero en el resto.

2. **Compacta:** $w(\vec{x} - \vec{x}_I) = 0$ fuera del dominio de validez Ω_I .
3. **Unicidad:** $\int_{\Omega_I} w(\vec{x} - \vec{x}_I) \cdot d\Omega = 1$.
4. La función de ponderación debe ser **monótonamente decreciente**, debido a que se debe dar mayor peso a los valores de la función que están más cerca del punto donde se está realizando la aproximación.
5. **Comportamiento función delta:** $w(\vec{x} - \vec{x}_I) \rightarrow \delta(\|\vec{x} - \vec{x}_I\|)$ con $h \rightarrow 0$.

Existen numerosos tipos de funciones de ponderación posibles, tal y como muestran las referencias [7] y [8]. Se define:

- \vec{x} punto del espacio donde se desea calcular la estimación del campo de viento,
- \vec{x}_I punto en el que se conoce el valor de la velocidad del viento (nodo),
- $d_I = \|\{\vec{x}\} - \{\vec{x}_I\}\|$ distancia existente entre el punto donde se realiza la aproximación y el punto del nodo,
- d_{ml} es el radio de influencia,
- ε el valor de la función de ponderación para d_{ml} ,
- $c = \alpha \cdot c_I$ en el que: $1 \leq \alpha \leq 2$ y c_I es la distancia representativa del área de análisis. Nótese que cuando c decrece se da mayor peso a los nodos cercanos a \vec{x} .

A continuación se definen las diversas funciones de ponderación:

1. Fracción Racional (véase referencia [9]):

$$w(d_I) = \frac{1}{\left[\left(\left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/p} - 1 \right) \left(\frac{d_I}{d_{ml}} \right)^2 + 1 \right]^p} \quad (\text{Ec. 20})$$

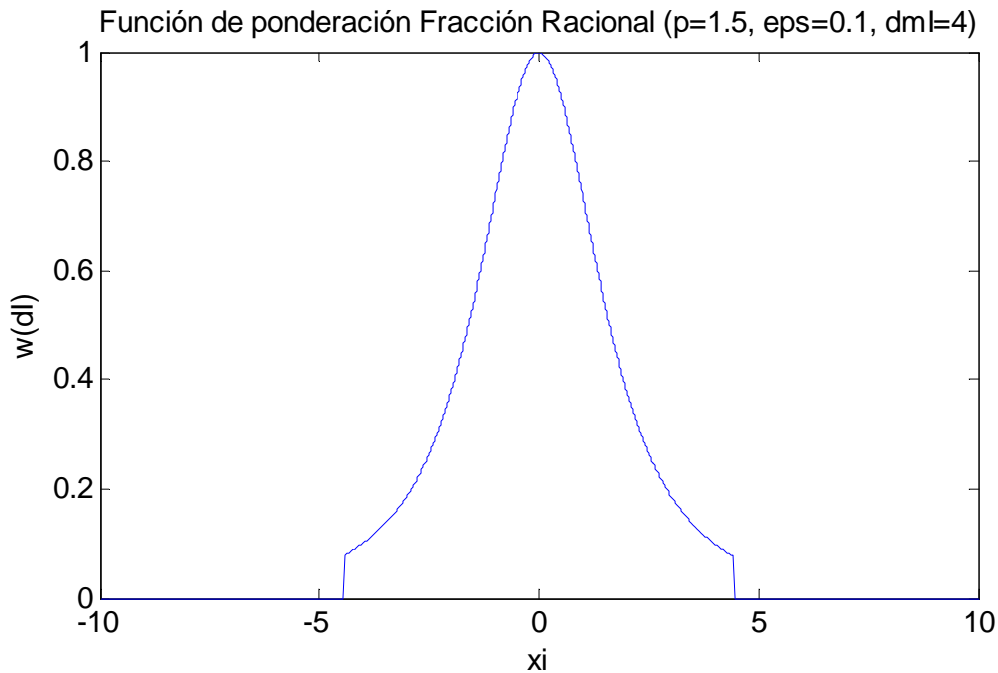


Figura 1: Función Fracción Racional

2. Triangular (véase referencia [9]):

$$\begin{aligned}
 w(d_I) &= 1 - \frac{|d_I|}{d_{ml}}(1 - \varepsilon) \quad \forall \quad |d_I| \leq \frac{d_{ml}}{(1 - \varepsilon)} \\
 w(d_I) &= 0 \quad \forall \quad |d_I| > \frac{d_{ml}}{(1 - \varepsilon)}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 21}$$

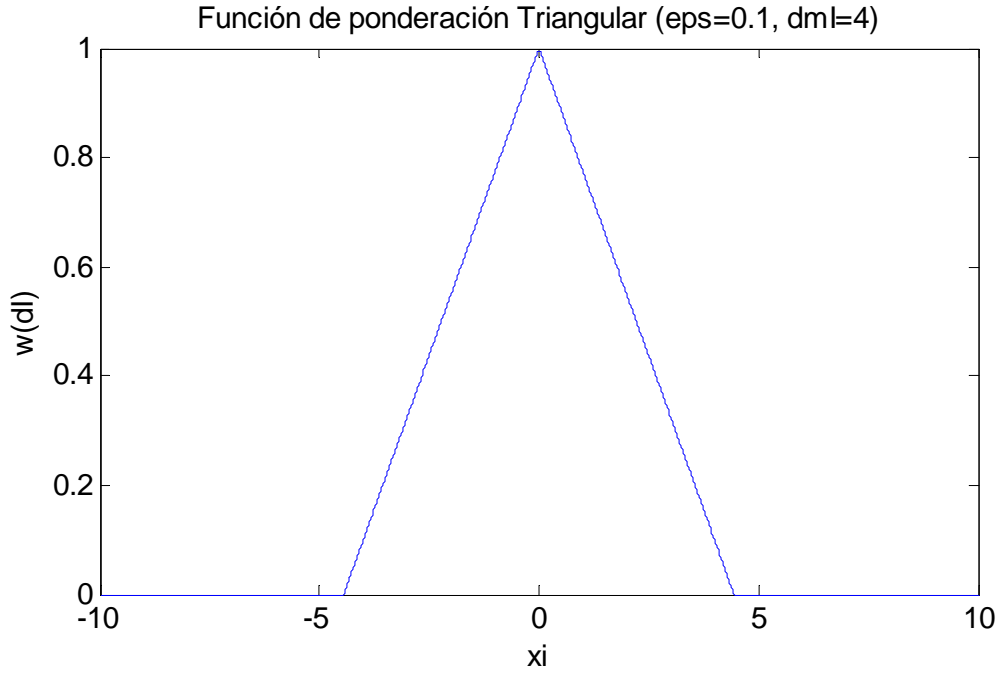


Figura 2: Función Triangular

3. B-Spline cuártica (véase referencias [7] y [8]): Donde para la representación de la Figura 3 $d_I = \text{abs}(x_I)$.

$$\begin{aligned}
 w(d_I) &= 1 - 6\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^2 + 8\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^3 - 3\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^4 \quad \forall \quad d_I \leq d_{ml} \\
 w(d_I) &= 0 \quad \forall \quad d_I > d_{ml}
 \end{aligned}
 \tag{Ec. 22}$$

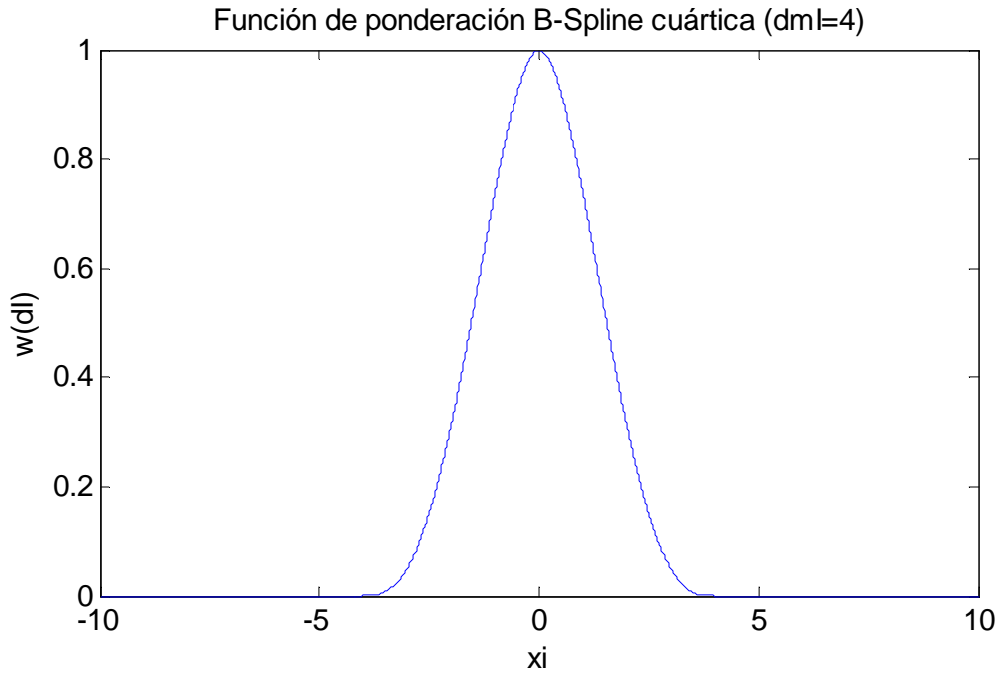


Figura 3: Función B-Spline Cuártica

4. Spline cúbica (véase referencia [8]): Donde para la representación de la Figura 4 $d_I = \text{abs}(x_I)$.

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^2 + 4\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^3 & \forall \left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right) + 4\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right)^3 & \forall \frac{1}{2} < \left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right) \leq 1 \\ 0 & \forall \left(\frac{d_I}{d_{ml}}\right) > 1 \end{cases} \quad (\text{Ec. 23})$$

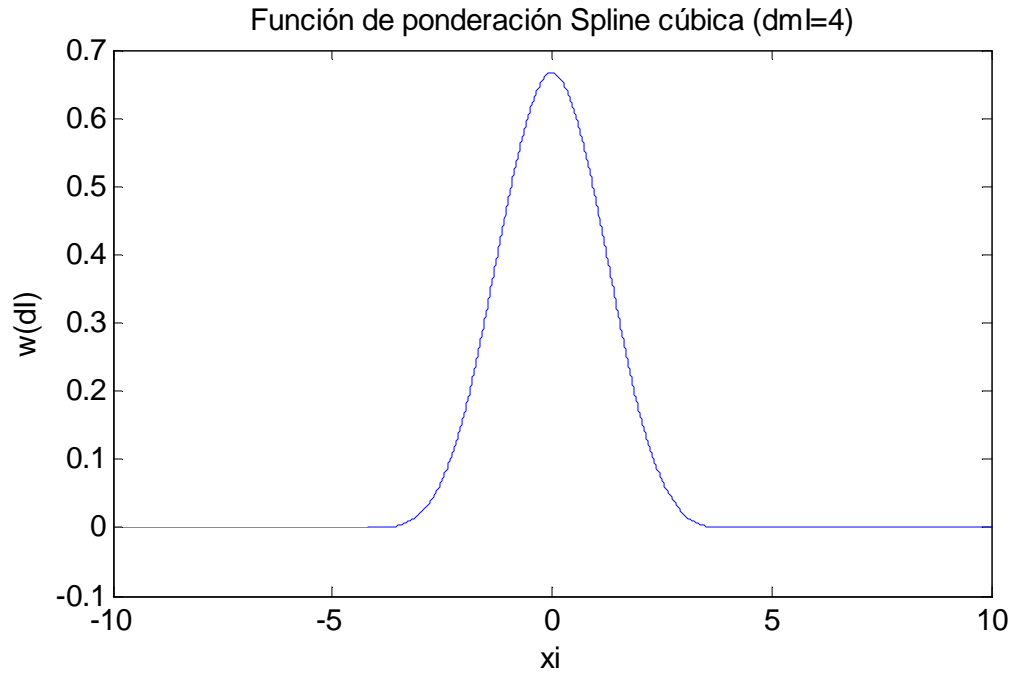


Figura 4: Función Spline Cúbica

5. Exponencial (véase referencia [8]): Donde para la representación de la Figura 5 $d_I = \text{abs}(x_I)$.

$$w(r) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right)}{c_I}\right)} & \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right) \leq 1 \\ 0 & \forall \left(\frac{d_I}{d_{mI}}\right) > 1 \end{cases} \quad (\text{Ec. 24})$$

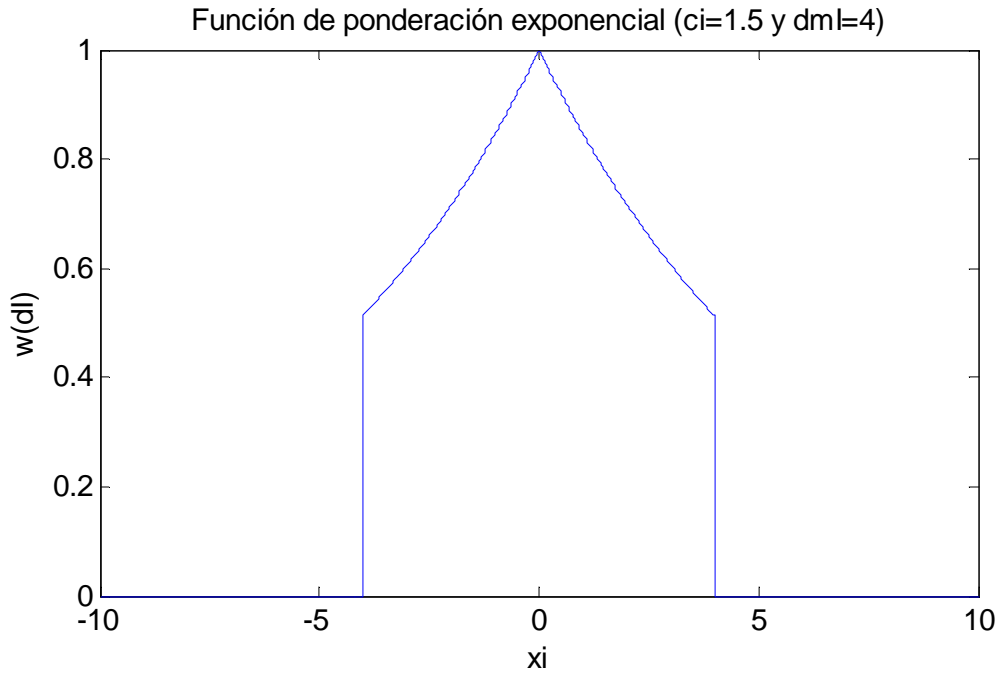


Figura 5: Función Exponencial

6. Gauss Truncada(véase referencias [6], [7], [8] y [9]):

$$w(d_l) = \frac{e^{-\left(\frac{d_l}{c}\right)^{2k}} - e^{-\left(\frac{d_{ml}}{c}\right)^{2k}}}{1 - e^{-\left(\frac{d_{ml}}{c}\right)^{2k}}} \quad \forall d_l \leq d_{ml} \quad (\text{Ec. 25})$$

$$w(d_l) = 0 \quad \forall d_l > d_{ml}$$

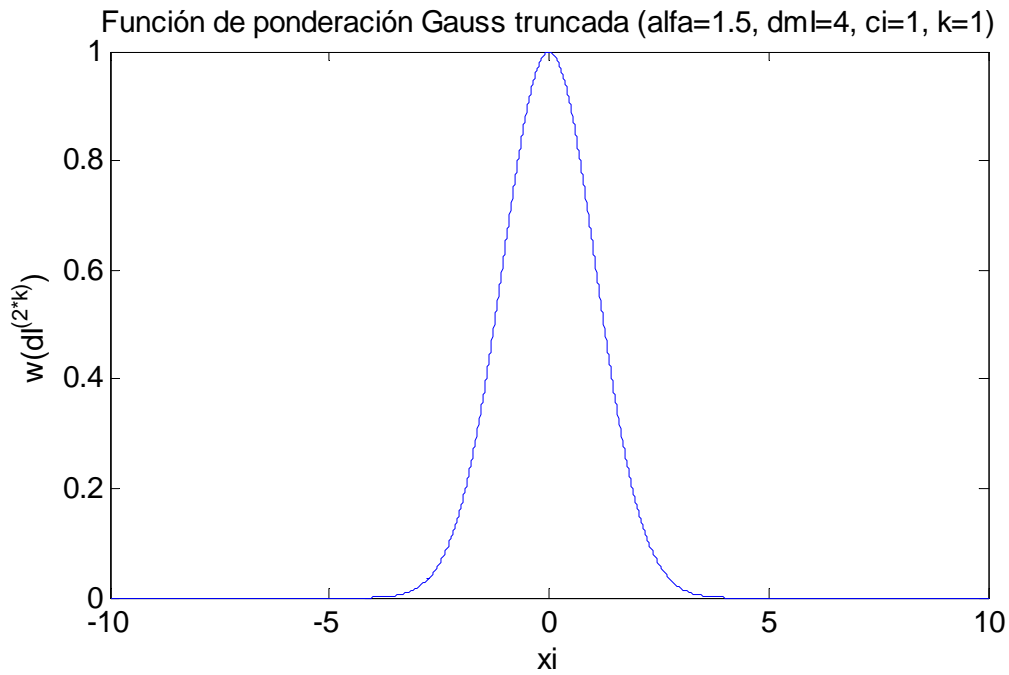


Figura 6: Función Gauss Truncada

Tras analizar el comportamiento de las funciones de ponderación definidas anteriormente, se ha decidido emplear la función de ponderación Gaussiana Truncada, debido a las siguientes justificaciones:

- Cuando el nodo coincide con el punto en el que quiere calcular la aproximación la función de ponderación debe valer 1, por lo tanto se descarta la función de ponderación Spline Cúbica.
- No ha de tener una excesiva pendiente a medida que $\|\vec{x} - \vec{x}_i\|$ aumenta, ya que daría mucho peso a puntos muy cercanos, eliminando la influencia de puntos relativamente cercanos. Siendo la que tiene un comportamiento más regular la función de Gauss Truncada, como puede observarse en la Figura 7.

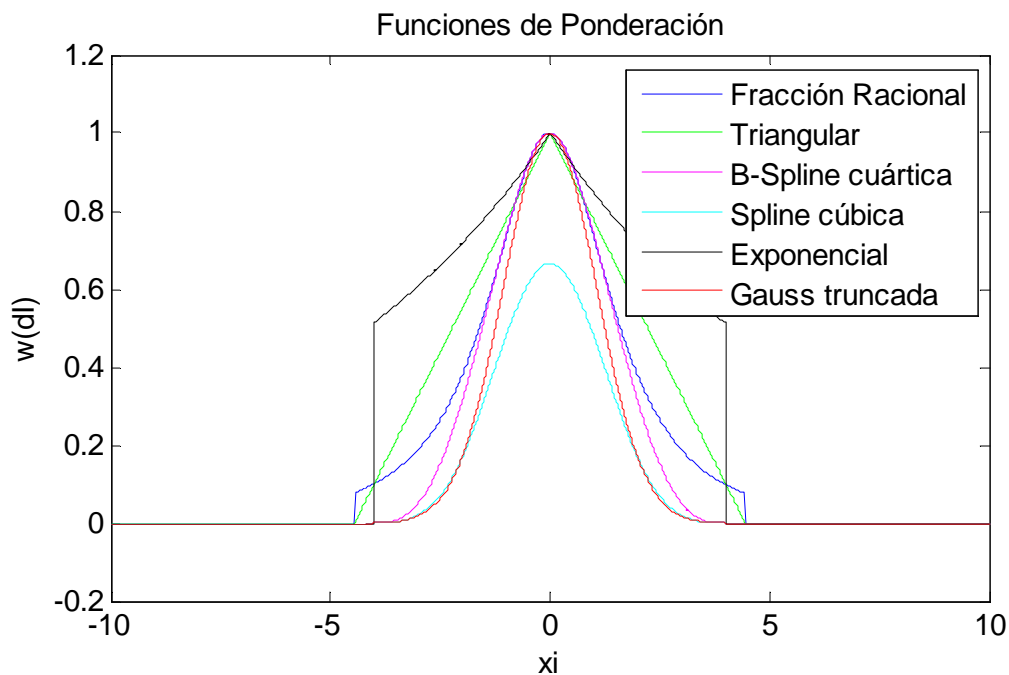


Figura 7: Funciones de Ponderación

1.4. Conclusiones

La disposición de las trayectorias 4D es fundamental para hacer viable los nuevos proyectos de gestión del tráfico aéreo SESAR/NextGen y a su vez para la obtención de las trayectorias 4D se debe disponer de una información precisa de los datos del campo de vientos.

Se ha estudiado el método **EFG** para estimar de una forma fiable el campo de vientos, empleado dos escenarios (uno con un comportamiento más laminar y otro más turbulento) con el fin de evaluar la calidad de las estimaciones.

En primer lugar se ha empleado el método introduciendo como puntos de observación las **velocidades** del espacio aéreo estudiado. Observándose que a medida que se aumenta el grado de la función de corriente o el número de puntos de observación, la calidad de la estimación mejora.

Además existe una dependencia de los resultados con el punto seleccionado, donde dicha dependencia disminuye a medida que aumenta el número de puntos de observación seleccionados dentro del espacio aéreo.

Finalmente se observa también, que los puntos frontera proporcionarán peores resultados, por lo tanto la estimación en esos puntos no deben ser tenidas en cuenta, tan solo deben emplearse para dar información a los puntos interiores.

Los resultados de éste método se pueden observar en la Tabla 1 y en la Tabla 2. En la Tabla 1 se encuentran los correspondientes a un campo de vientos más turbulento, donde se puede destacar los elevados errores cometidos en prácticamente todos los casos, ya que se pueden considerar aceptables errores inferiores al 20% de la velocidad media. Lo cual nos indica que el presente modelo no es bueno para vientos cuyo comportamiento sea más turbulento.

Tabla 1: Conclusión EFGM empleando las velocidades para un campo de vientos más turbulento

GRADO Φ	PUNTOS DE OBSERVACIÓN MÍNIMOS	ERRORES COMETIDOS
3	20	73%
4	35	56%
5	35	46%
6	40	37%
7	45	34%

Finalmente en la Tabla 2 se tienen los correspondientes resultados de un escenario más laminar, todos los casos producen unos valores de error en torno al 20% de la velocidad media, siendo por lo tanto un buen método para estimar un campo de vientos con un carácter más laminar.

Tabla 2: Conclusión EFGM empleando las velocidades para un campo de vientos más laminar

GRADO Φ	PUNTOS DE OBSERVACIÓN MÍNIMOS	ERRORES COMETIDOS
3	73	23%
4	80	16%
5	83	16%
6	85	15%
7	90	15%

Hay que resaltar que los valores que aparecen en la columna de puntos de observación mínimo, son los puntos de observación necesarios para garantizar que el error cometido sea siempre del porcentaje determinado, independientemente de la posición de cada uno de los puntos seleccionados.

Finalmente se ha empleado el método introduciendo como puntos de observación las **presiones** del espacio aéreo estudiado. Donde se ha realizado una buena estimación en ambos escenarios de la presión, mientras que la velocidad estimada en todos los casos es inadmisibles a causa de la importancia que tiene la pendiente de la presión y a que el método empleado no controla su

valor. Por lo tanto introduciendo como puntos de observación las presiones el método de Galerkin no estima de una forma adecuada el campo de velocidades del viento.

1.5. Trabajos Futuros

Con el fin de mejorar el presente trabajo se debería incluir la posibilidad de que los puntos frontera aporten información adicional debido a que en un espacio aéreo se puede disponer de información del espacio aéreo contiguo.

Además de introducir/caracterizar el error de los valores medidos en el modelo, ya sea en las medidas de la presión como en las de la velocidad del viento, debido a que como cualquier medida realizada va inherente a un error cometido en dicho proceso.

Así como la posibilidad de simular escenarios reales, es decir, seleccionar puntos de ubicación de posibles aeronaves dentro del volumen de control considerado, tal y como representa la Figura 8, hecho que permitirá plantear de forma realista los radios de influencia de los datos para la estimación de un punto del volumen de control, permitiendo así obtener una buena aproximación en zonas de paso de aeronaves.

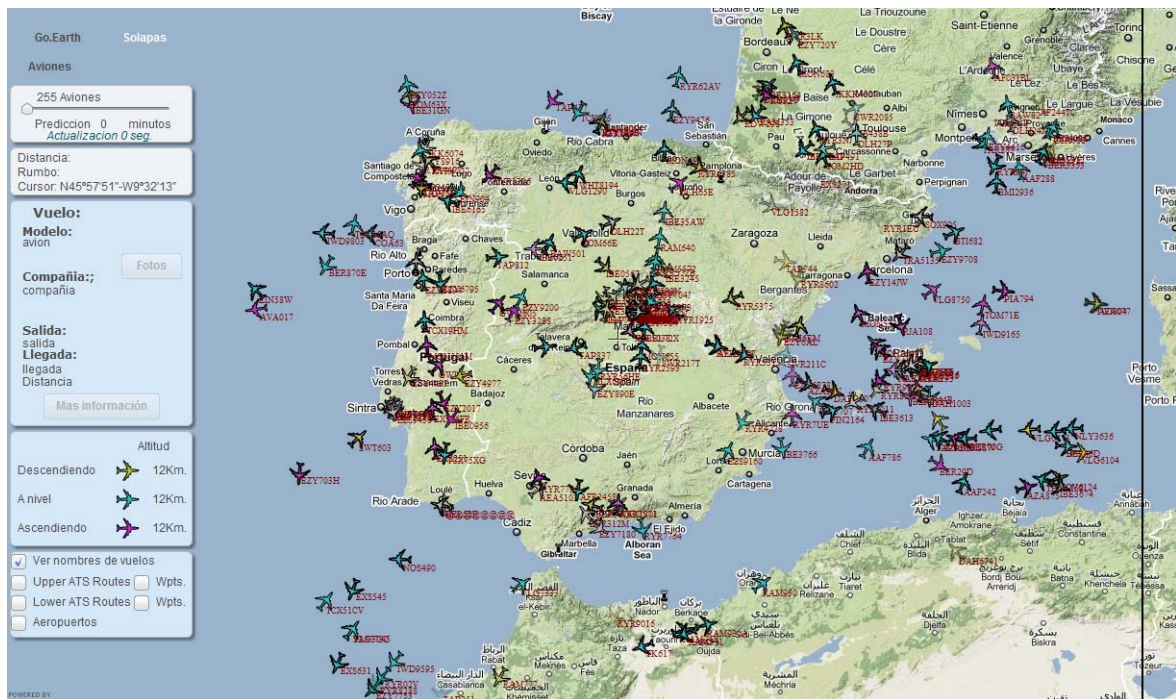


Figura 8: Escenario real espacio aéreo

En el presente proyecto se ha realizado la hipótesis de que los coeficientes $C_{ij}(\bar{x})$ son constantes en el entorno del punto donde se está realizando la estimación, simplificado así el cálculo, debido a que en el entorno del punto en el que se está realizando la aproximación se prevé dicha situación, ya que se considera que va a estar rodeado uniformemente de puntos de observación.

Las ecuaciones eliminando tal aproximación serán las representadas en la ecuación (Ec. 26) y (Ec. 27) que como puede apreciarse son de más difícil resolución a las empleadas en el presente proyecto.

$$\begin{aligned}
 u(\vec{x}) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial a_{00}}{\partial y} + \frac{\partial a_{10}}{\partial y} x + \frac{\partial a_{01}}{\partial y} y + a_{01} + \frac{\partial a_{20}}{\partial y} x^2 + \frac{\partial a_{11}}{\partial y} xy + a_{11}x + \dots = \\
 &= \frac{\partial}{\partial y} \sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij} x^i y^j = \sum_{i=0} \sum_{j=0} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial y} x^i y^j + j a_{ij} x^i y^{j-1} \right)
 \end{aligned} \tag{Ec. 26}$$

$$\begin{aligned}
 v(\vec{x}) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\left[\frac{\partial a_{00}}{\partial x} + \frac{\partial a_{10}}{\partial x} x + a_{10} + \frac{\partial a_{01}}{\partial x} y + \frac{\partial a_{20}}{\partial x} x^2 + 2a_{20}x + \frac{\partial a_{11}}{\partial x} xy + a_{11}y + \dots \right] = \\
 &= -\frac{\partial}{\partial x} \sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij} x^i y^j = -\sum_{i=0} \sum_{j=0} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x} x^i y^j + i a_{ij} x^{i-1} y^j \right)
 \end{aligned} \tag{Ec. 27}$$

En futuros trabajos se pretende también introducir la variable tiempo, así como la coordenada z , en el modelo, ya que la primera será necesaria para disponer de las trayectorias 4D, y la segunda debido a que las aeronaves no se desplazan en un plano sino que emplean todo el espacio aéreo permitido.

2. ESTADO DEL ARTE

En la actualidad ATM se puede clasificar según OACI en tres niveles de gestión: ASM (estratégica), ATFM (pre-táctica) y ATC (táctica).

El control de tráfico aéreo (ATC) se encarga de gestionar y organizar el tráfico aéreo, en tiempo real, cuya labor es realizada por los controladores de la circulación aérea. Para lo cual dispone de la información de los planes de vuelo de cada aeronave (está disponible para el controlador 10 minutos antes de proporcionar a dicha aeronave servicio de control), así como los datos suministrados por los radares existentes, cuya presentación gráfica se completa con la representación de la “cola” (indicación procedencia), vector velocidad, indicativo, nivel de vuelo o altitud, etc.

Estos hechos producen que se disponga de un tiempo reducido para gestionar de una forma segura el tráfico aéreo, dificultando dicha actividad. Así mismo se añade la dificultad de que éstos no disponen de la información de la velocidad del viento, siendo ésta de vital importancia para la determinación de las distancias relativas de los aviones⁴.

Actualmente se trabaja en proyectos para soslayar estas dificultades, como son el proyecto NextGen en Estados Unidos y su homólogo SESAR en Europa, donde se pretende cambiar el paradigma del ATM actual. Se desea disponer de la posición de cada aeronave en el espacio y para todo instante de tiempo, trayectorias 4D (posición y tiempo), que permita una gestión más eficiente y con un mayor tiempo de antelación, del espacio aéreo.

La situación actual del espacio aéreo dispone de una serie de limitaciones, como indica la referencia [19] página 14, que se exponen a continuación:

- El espacio aéreo europeo está organizado alrededor del uso de rutas fijas y rígidas, mientras que las aeronaves disponen de tecnología suficiente para poder volar rutas más eficientes, lo cual crea una carga de trabajo innecesaria al control de tráfico aéreo.
- Muchos de los aviones que vuelan hoy en día lo hacen con precisión en términos de posición y tiempo. Estas capacidades actualmente no están siendo explotadas.
- A través de procesos, procedimientos y sistemas utilizados por el personal encargado de la planificación, gestión y ejecución de vuelos, las decisiones se toman a menudo de forma aislada en algunos aspectos que tienen gran repercusión en el resto de perfiles de vuelo. Sin embargo existe una gran cantidad de información disponible que actualmente no está siendo explotada.
- Con las herramientas y procedimientos que se emplean a día de hoy la capacidad del espacio aéreo es limitada y está llegando a sus límites.

⁴ Nótese que si una aeronave se desplaza con viento de cara la distancia recorrida será menor que si se desplaza con viento de cola.

- Hoy en día los pilotos tienen un conocimiento limitado de la situación del tráfico que pueden afectarlos y esto les limita a tener un papel más activo en el proceso de gestión de tráfico aéreo.
- Capacidad de los aeropuertos (por ejemplo, debido a su infraestructura, el medio ambiente y las restricciones políticas), junto con el espacio aéreo terminal es el principal factor que limita la capacidad estructural.

A la hora de definir cualquier tipo de trayectoria hay que tener presente las desviaciones que estas disponen. Existen tres tipos de desviaciones: desviaciones laterales, desviaciones longitudinales y desviaciones verticales. El Error Total del Sistema (TSE) tiene lugar para cada una de las desviaciones mencionadas anteriormente, el cual puede clasificarse en dos: Error de navegación (NSE) y Error Técnico de Vuelo (FTE). El NSE es el error atribuible al uso del sistema de navegación, incluye el sensor de navegación, el error del receptor y el error de definición de la trayectoria (PDE). El NSE es la contribución que realiza el piloto o el piloto automático en el uso de la información de navegación para el control de la posición de la aeronave ([20] páginas 3-4). Así mismo se puede escribir:

$$\sigma_{TSE}^2 = \sigma_{NSE}^2 + \sigma_{FTE}^2 \quad (\text{Ec. 28})$$

Donde σ_{TSE} , σ_{NSE} y σ_{FTE} son las desviaciones típica de las respectivas componentes de error.

Las trayectorias 4D son estimadas antes del vuelo con ayuda del plan de vuelo y de una ETA calculada a través de una estimación de velocidad y altitud de acuerdo con las necesidades de la aeronave en concreto y con el estado previsible del espacio aéreo. Durante el vuelo se corregiría la trayectoria definida previamente ya que a través de datos ADS-B se dispone de la posición y velocidad de cada una de las aeronaves, así como de la velocidad del viento, con estos datos se vuelve a estimar una trayectoria 4D dando las posiciones futuras de la aeronave y su nuevo ETA.

Para definición de las trayectorias 4D es necesario disponer de una información precisa de posición y velocidad de las aeronaves y de la velocidad del viento, como ya se ha mencionado previamente. Pudiéndose obtener mediante la utilización de los sistemas actuales, añadiendo a éstos los datos proporcionados por todas las aeronaves en los mensajes ADS-B (véase Anexo 1), ya que en estos mensajes se pueden transmitir información con gran precisión, disponible en la propia aeronave, de su estado (posición, velocidad, etc.).

La definición de trayectorias 4D únicas posee un gran número de ventajas significativas para la gestión del espacio aéreo, tal y como explican en la referencia [19]:

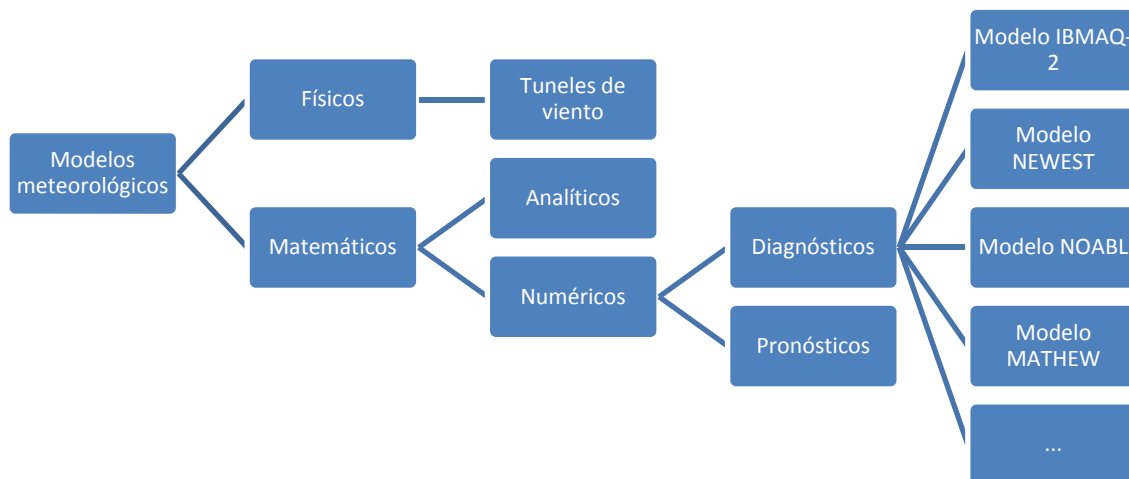
- Éstas reducen la incertidumbre que a su vez reducen el número de conflictos que necesitan resolverse.
- Cuando se combina con las mejoras en navegación (vertical, lateral y en tiempo), reduce la cantidad de espacio aéreo inutilizado alrededor de cada aeronave permitiendo introducir más aviones en el espacio aéreo.
- Hay una fuente precisa de datos que puede utilizarse mediante herramientas de control automático.

- Redefinen la necesidad de muchas estructuras de espacio aéreo que actualmente restringen la eficacia, lateralmente y verticalmente, de los planes de vuelo.

Dada la importancia que tiene la determinación de una forma precisa de la dinámica de la aeronave, es primordial el conocimiento del campo de velocidades del viento. El inconveniente que se presenta en la actualidad es que no se dispone de tal información, tan sólo se emplean informes meteorológicos facilitados por los institutos de meteorología en los que se aportan predicciones de vientos, tormentas, etc.

Autores como Eduardo Rodríguez (Referencia [1]) emplea un método de resolución a través de elementos finitos adaptativos en 3D al igual que Nancy Sanín (Referencia [2]) que emplea un modelo tridimensional para el ajuste de campos de viento y la dispersión de contaminantes de la atmósfera.

Los modelos meteorológicos se pueden clasificar como muestra el esquema a continuación, en modelos físicos (Emplean túneles de viento para la resolución a pequeña escala) y matemáticos (A través de la resolución matemática de las ecuaciones). Estos últimos a su vez pueden ser analíticos (proporciona una solución exacta de problema) o numéricos (Emplean técnicas de integración numérica obteniendo una solución aproximada). Finalmente los modelos numéricos se dividen en dos tipos: diagnósticos (No evalúan la evolución meteorológica) o pronósticos (Evalúan la evolución meteorológica).



La modelización de campos de viento utilizada por Nancy Sanín y Eduardo Rodríguez se basa en un modelo del tipo masa consistente, los cuales son modelos de diagnóstico para determinar los campos de viento a partir de medidas con una posición conocida y fija en el espacio (Ejemplo: Estaciones meteorológicas). En él se parte de la ecuación de continuidad de la mecánica de fluidos para el caso de un fluido incompresible (fluido a bajas velocidades) y la condición de impermeabilidad del terreno (véase (Ec. 29)). Posteriormente se aplica a dicho modelo mínimos

cuadrados para ajustar las velocidades del campo inicial creado previamente (véase [2] página 18).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 & \text{en } \Omega \\ \vec{n} \cdot \vec{v} &= 0 & \text{en } \Gamma_T\end{aligned}\quad (\text{Ec. 29})$$

Para la construcción del campo inicial se parte de los datos recogidos por las estaciones de medida. En primer lugar se calcula mediante interpolación horizontal (Ec. 30) el valor de \vec{v}_0 en los puntos del dominio situados a la misma altura sobre el terreno, que las estaciones de medida. Con esta información se realiza una extrapolación vertical [(Ec. 31), (Ec. 32), (Ec. 33)] para definir el campo de velocidades en todo el dominio.

$$\vec{v}_0(z_T) = \varepsilon \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{d_n^2}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{d_n^2}} + (1 - \varepsilon) \frac{\sum_{n=1}^N \frac{\vec{v}_n}{|\Delta h_n|}}{\sum_{n=1}^N \frac{1}{|\Delta h_n|}} \quad (\text{Ec. 30})$$

Donde:

- \vec{v}_n : Velocidad observada en la estación n .
- N : Número de estaciones empleadas.
- d_n : Distancia horizontal desde la estación n al punto donde se realiza el cálculo de la velocidad del viento.
- $|\Delta h_n|$: Diferencia de altura entre la estación n y el punto de estudio.
- ε : Parámetro de peso. $0 < \varepsilon < 1$.

$$\vec{v}_0(z) = \frac{\vec{v}^*}{k} \left(\log \frac{z}{z_0} - \Phi_m \right) \quad z_0 < z < z_{sl} \quad (\text{Ec. 31})$$

$$\vec{v}_0(z) = \rho(z) \vec{v}_0(z_{sl}) + [1 - \rho(z)] \vec{v}_g \quad z_{sl} < z < z_{pbl} \quad (\text{Ec. 32})$$

$$\begin{aligned}\vec{v}_0(z) &= \vec{v}_g & z > z_{pbl} \\ \vec{v}_0(z) &= 0 & z < z_0\end{aligned}\quad (\text{Ec. 33})$$

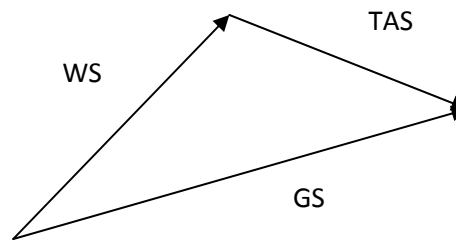
Donde:

- \vec{v}_0 : Velocidad del viento.
- z : Altura por encima del terreno.
- \vec{v}^* : Velocidad de fricción.
- k : Constante de von Kármán. $k \simeq 0,4$.
- z_0 : Longitud de rugosidad.
- Φ_m : Función dependiente de la estabilidad atmosférica.

- z_{sl} : Altitud de la capa superficial. Es la decima parte de la capa de mezcla.
- z_{pbl} : Altitud de la capa límite planetaria. $z_{pbl} = \gamma |\vec{v}^*| / f$. Siendo: f el parámetro de Coriolis y γ un valor comprendido entre 0,15 y 0,3.
- $\rho(z) = 1 - \left(\frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right)^2 \left(3 - 2 \frac{z - z_{sl}}{z_{pbl} - z_{sl}} \right)$
- \vec{v}_g : Viento geostrófico.

El método que se pretende desarrollar en el presente proyecto pretende determinar el campo de vientos empleando para su elaboración los datos de velocidad del viento calculados con ayuda de la información suministrada en los mensajes ADS-B de cada una de las aeronaves situadas en el espacio aéreo a considerar. Por lo tanto los valores del campo inicial disponibles no dispondrán de una posición fija en el espacio, hecho que ocurre en los desarrollos expuestos anteriormente. Siendo conveniente la utilización de un modelo sin malla fija.

Los mensajes ADS-B se dispone de la posición de la aeronave (véase mensaje de posición dentro del Anexo 1) y la velocidad (véase mensaje de velocidad dentro del Anexo 1), así como la velocidad del viento puede ser calculada como la diferencia entre la GS y la TAS que son obtenidas a través del mensaje ADS-B de velocidad.



El método de Galerkin publicado por Belytschiko en 1994 (Referencia [6]) aporta un método de estimar una función, por medio de valores de la misma, conocidos en el volumen de control, adaptándose a la naturaleza del problema que se plantea (véase 1.3.1). Gracias a la gran cantidad de aeronaves que pueden existir a la vez en un mismo espacio aéreo, y por lo tanto un significativo número de puntos en los que se conoce el valor de la velocidad del viento, se prevé que la función estimada obtenida mediante este método se puede adaptar bastante bien al campo de vientos reales de dicho espacio aéreo.

3. DISEÑO MODELO DE CAMPO DE VIENTOS

La solución de un problema físico se puede abordar mediante infinitos procedimientos. Si se dispone de un modelo de ecuaciones, lo que se deseará en primera instancia es conocer la solución analítica, hecho que con frecuencia es difícil o imposible. En caso de no ser factible la vía analítica se buscará una aproximación numérica de la misma que satisfaga los valores de errores máximos permitidos entre el valor esperado y el valor aproximante.

3.1. Resolución Mediante Ecuaciones Trigonómicas

Al tratarse la problemática del tema del movimiento del aire a bajos números de Mach, se puede considerar como un fluido incompresible, y pudiéndose emplear por consiguiente las ecuaciones de Navier-Stokes para tales fluidos (véase (Ec. 1) y (Ec. 3)). En el presente apartado se pretenderá calcular u y v (componentes de la velocidad) resolviendo analíticamente la ecuación de continuidad e imponiendo el valor conocido de las mismas para el cálculo de las distintas coeficientes considerados constantes.

Haciendo uso de la función de corriente ψ , y obligando al cumplimiento de la ecuación de continuidad (Ec. 1) se llega a la (Ec. 34).

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Ec. 34})$$

Resolviendo la (Ec. 34) por el método de separación de variables de forma que $\psi = X(x) \cdot Y(y)$.[3]

$$X''Y + X\ddot{Y} = 0 \rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{\ddot{Y}}{Y} = Cte = \lambda \quad (\text{Ec. 35})$$

Cuya solución general puede obtenerse mediante el uso de la función exponencial, como se describe a continuación:

- $X(x) = Cte \cdot e^{\sqrt{\lambda}x}$
- $Y(y) = Cte \cdot e^{\sqrt{-\lambda}y}$

Introduciendo lo anteriormente expuesto en la (Ec. 34), se obtienen las siguientes expresiones, donde $A_{1x}, A_{1y}, A_{2x}, A_{2y}$ y λ son valores contantes:

$$\begin{aligned}
u = & \sqrt{\lambda} A_{1x} A_{1y} e^{(\sqrt{\lambda}x + \sqrt{-\lambda}y)} - \sqrt{\lambda} A_{2x} A_{1y} e^{(-\sqrt{\lambda}x + \sqrt{-\lambda}y)} \\
& + \sqrt{\lambda} A_{1x} A_{2y} e^{(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\lambda}y)} - \sqrt{\lambda} A_{2x} A_{2y} e^{(-\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\lambda}y)}
\end{aligned} \tag{Ec. 36}$$

$$\begin{aligned}
v = & \sqrt{-\lambda} A_{1x} A_{1y} e^{(\sqrt{\lambda}x + \sqrt{-\lambda}y)} + \sqrt{-\lambda} A_{2x} A_{1y} e^{(-\sqrt{\lambda}x + \sqrt{-\lambda}y)} \\
& - \sqrt{-\lambda} A_{1x} A_{2y} e^{(\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\lambda}y)} - \sqrt{-\lambda} A_{2x} A_{2y} e^{(-\sqrt{\lambda}x - \sqrt{-\lambda}y)}
\end{aligned} \tag{Ec. 37}$$

Inicialmente se intentó resolver el sistema donde A_{1x} , A_{1y} , A_{2x} , A_{2y} y λ son las incógnitas del problema y se ha necesitado de 3 puntos para la determinación de dichas incógnitas (6 ecuaciones). De los puntos se ha supuesto conocida su posición (x, y) y las componentes de la velocidad u y v (información que se puede obtener de los mensajes ADS-B).

Este método de resolución daba como solución valores imaginarios a las incógnitas, por lo tanto se pasó a separar la parte real y la imaginaria de cada una de las incógnitas y se introdujo la ecuación adicional de que tanto u como v deben de ser reales, complicando operacionalmente el problema, por lo tanto se buscó un método de más sencilla resolución.

Se observa las semejanzas del problema planteado con la resolución de la Laplaciana en 2D con condiciones de contorno tipo Neumann en un rectángulo de lados a, b , que tras tratarse el operador Laplaciano de un operador lineal, se puede descomponer el problema en dos: [5]

$$1. \underline{\Delta \Psi^I = 0}; 0 < x < a; 0 < y < b$$

$$\underline{\Psi^I(0, y) = 0}; \underline{\Psi^I(a, y) = 0}; 0 < y < b \quad \underline{\Psi^I(x, 0) = f_3(x)}; \underline{\Psi^I(x, b) = f_4(x)}; 0 < x < a$$

$$\Psi^I(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + D_n \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \tag{Ec. 38}$$

$$2. \underline{\Delta \Psi^{II} = 0}; 0 < x < a; 0 < y < b \quad \underline{\Psi^{II}(0, y) = f_1(y)}; \underline{\Psi^{II}(a, y) = f_2(y)}; 0 < y < b$$

$$\underline{\Psi^{II}(x, 0) = 0}; \underline{\Psi^{II}(x, b) = 0}; 0 < x < a$$

$$\Psi^{II}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(C'_n \cosh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) + D'_n \sinh\left(\frac{n\pi x}{b}\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \tag{Ec. 39}$$

$$\Psi = \Psi^I(x, y) + \Psi^{II}(x, y) \tag{Ec. 40}$$

En el que C_n , D_n , C'_n y D'_n son las constantes a determinar y a, b los lados del rectángulo, ya que se va a considerar que la superficie de control es de forma rectangular.

Introduciendo las ecuaciones de $\Psi^I(x, y)$ (Ec. 38) y $\Psi^{II}(x, y)$ (Ec. 39) en la ecuación (Ec. 40) y derivando con respecto de x o de y para el cálculo de la componentes de la velocidad (u, v) como se indica en la ecuación (Ec. 34), dando como resultado las ecuaciones que se muestran a continuación:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a} \right) \left(C_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) + D_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi x}{a} \right) + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(C'_n \sinh \left(\frac{n\pi x}{b} \right) + D'_n \cosh \left(\frac{n\pi x}{b} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (\text{Ec. 41})$$

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a} \right) \left(C_n \sinh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) + D_n \cosh \left(\frac{n\pi y}{a} \right) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{a} \right) + \left(\frac{n\pi}{b} \right) \left(C'_n \cosh \left(\frac{n\pi x}{b} \right) + D'_n \sinh \left(\frac{n\pi x}{b} \right) \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \quad (\text{Ec. 42})$$

Para evaluar la estimación realizada se expondrán una serie de ejemplos numéricos con el fin de verificar la posible utilización de las ecuaciones (Ec. 41) y (Ec. 42) para la determinación del campo de velocidades del viento. Para tales fines se intentará reproducir el campo de vientos que se muestra en la Figura 9 y cuya ecuación viene representada en la (Ec. 43), que cumple la ecuación de continuidad de los fluidos incompresibles.

$$\begin{aligned} u_m(x, y) &= -y \\ v_m(x, y) &= x \end{aligned} \quad (\text{Ec. 43})$$

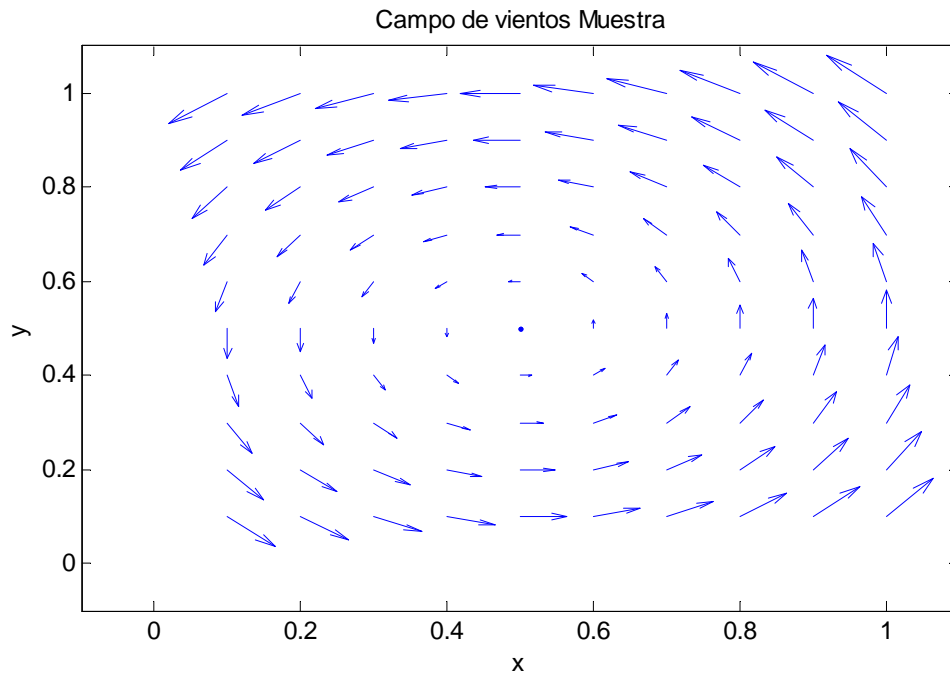


Figura 9: Campo de vientos muestra

3.1.1. Ejemplo 1

En el presente ejemplo se buscará la aproximación del campo de velocidades con tan solo dos términos ($n=1$ y $n=2$) del sumatorio de las ecuaciones (Ec. 41) y (Ec. 42). Conociéndose para su resolución el valor de u y v de los siguientes cuatro puntos, se tendrá un sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas ($C_1, D_1, C_2, D_2, C'_1, D'_1, C'_2, D'_2$):

- Punto 1: $\vec{x}(x, y) = (a/2, 0); \vec{v}(u, v) = (v_m, 0).$
- Punto 2: $\vec{x}(x, y) = (a, b/2); \vec{v}(u, v) = (0, v_m).$
- Punto 3: $\vec{x}(x, y) = (a/2, b); \vec{v}(u, v) = (-v_m, 0).$
- Punto 4: $\vec{x}(x, y) = (0, b/2); \vec{v}(u, v) = (0, -v_m).$

Con ayuda del programa Matlab para $v_m = 2, a = b = 1$, se resolvió el sistema de ecuaciones dando como resultado las siguientes aproximaciones para u y v :

$$\begin{aligned} u(x, y) \simeq & (\pi) \left(-10^{-15} \cosh(\pi y) + 10^{-15} \sinh(\pi y) \right) \cos(\pi x) + \\ & + (2\pi) \left(-0.3183 \cosh(2\pi y) + 0.3195 \sinh(2\pi y) \right) \cos(2\pi x) \\ & + (\pi) \left(-10^{-15} \cosh(\pi x) \right) \sin(\pi y) + \\ & + (2\pi) \left(0.3183 \sinh(2\pi x) - 0.3195 \cosh(2\pi x) \right) \sin(2\pi y) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 44})$$

$$\begin{aligned} v(x, y) \simeq & \pi \left(-10^{-15} \sinh(\pi y) + 10^{-15} \cosh(\pi y) \right) \sin(\pi x) + \\ & + (2\pi) \left(-0.3183 \sinh(2\pi y) + 0.3195 \cosh(2\pi y) \right) \sin(2\pi x) + \\ & + (\pi) \left(-10^{-15} \sinh(\pi x) \right) \cos(\pi y) + \\ & + (2\pi) \left(0.3183 \cosh(2\pi x) - 0.3195 \sinh(2\pi x) \right) \cos(2\pi y) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 45})$$

Una vez determinadas las ecuaciones que aproximan u y v , para comprobar de forma rápida si es buena dicha aproximación se representa y se calcula el valor de u y v en todos los puntos del volumen de control, cuyas representaciones pueden observarse en la Figura 10 y en la Figura 11.

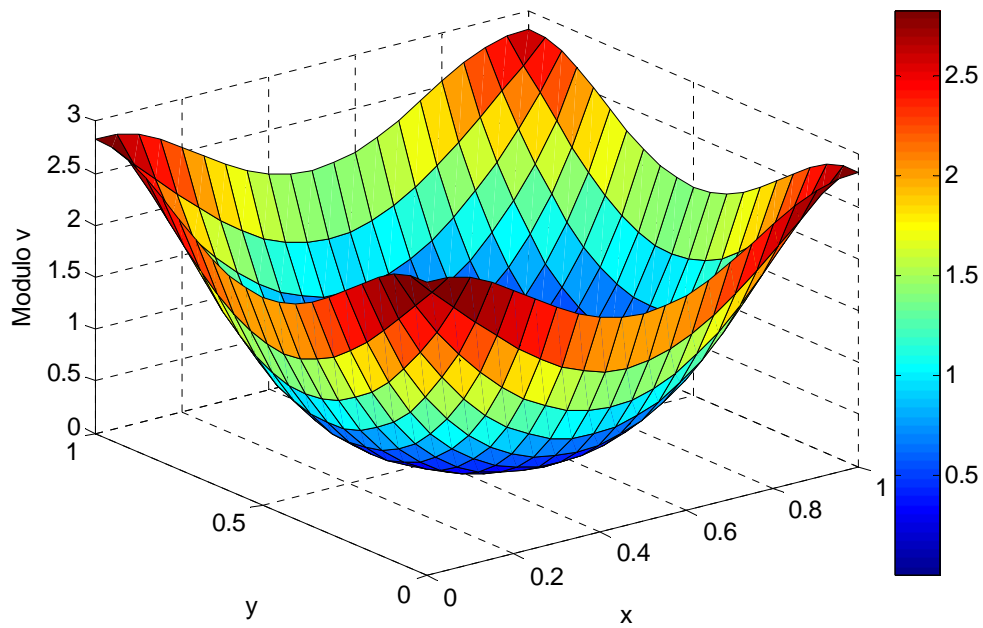


Figura 10: Modulo de la velocidad Ejemplo 1

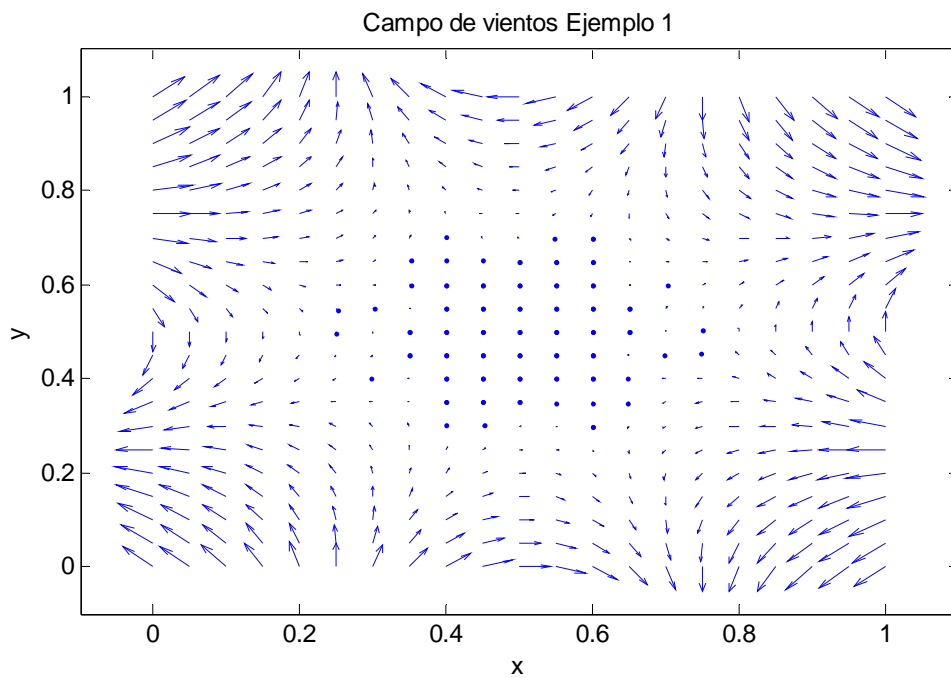


Figura 11: Campo de vientos Ejemplo 1

Se puede concluir tras analizar las figuras que la forma del módulo de la velocidad es la adecuada, ya que lo que se quiere modelar es un torbellino, pero a la hora de representar el campo de vectores (Figura 11) se observa que tan solo es igual en los puntos introducidos como condición de contorno, mientras que el campo de vientos posee un punto de silla en el origen con 8

separatrices en lugar de un máximo/mínimo, no resultando válida por tanto la aproximación calculada.

3.1.2. Ejemplo 2

Con el objetivo de comprobar si los resultados erróneos son producidos al introducir tan sólo puntos del contorno con el mismo módulo se desarrolla el presente ejemplo, en el que se han establecido como puntos conocidos los que se muestran a continuación:

- Punto 1: $\vec{x}(x, y) = \left(\frac{a}{10}, 0\right)$; $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(\cos \theta_1, -\sin \theta_1)$.
- Punto 2: $\vec{x}(x, y) = \left(a, \frac{b}{2}\right)$; $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(0, 1)$.
- Punto 3: $\vec{x}(x, y) = \left(\frac{9a}{10}, b\right)$; $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(-\cos \theta_1, \sin \theta_1)$.
- Punto 4: $\vec{x}(x, y) = \left(0, \frac{b}{2}\right)$; $\vec{v}(u, v) = v_m(0, -1)$.

Al igual que en ejemplo anterior, se ha resuelto el sistema de 8 ecuaciones con 8 incógnitas ($C_1, D_1, C_2, D_2, C_1', D_1', C_2', D_2'$) con el programa Matlab, introduciendo los siguientes valores a las variables: $v_m = v_{m2} = 2$, $v_{m1} = 2.5612$, $\theta_1 = 0.6747 \text{ rad}$ y $a = b = 1$. Tras la resolución de dicho sistema, el modelo del campo de vientos del ejemplo 2 viene representado por las ecuaciones (Ec. 46)(Ec. 47).

$$\begin{aligned} u(x, y) \approx & (\pi) \left(-0.51833 \cosh(\pi y) + 0.47539 \sinh(\pi y) \right) \cos(\pi x) + \\ & + (2\pi) \left(0.6981 \cosh(2\pi y) - 0.7007 \sinh(2\pi y) \right) \cos(2\pi x) \\ & + (\pi) \left(-0.2252 \sinh(\pi x) + 0.2065 \cosh(\pi x) \right) \sin(\pi y) + \\ & + (2\pi) \left(0.3183 \sinh(2\pi x) - 0.3195 \cosh(2\pi x) \right) \sin(2\pi y) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 46})$$

$$\begin{aligned} v(x, y) \approx & \pi \left(-0.51833 \sinh(\pi y) + 0.47539 \cosh(\pi y) \right) \sin(\pi x) + \\ & + (2\pi) \left(0.6981 \sinh(2\pi y) - 0.7007 \cosh(2\pi y) \right) \sin(2\pi x) + \\ & + (\pi) \left(-0.2252 \cosh(\pi x) + 0.2065 \sinh(\pi x) \right) \cos(\pi y) + \\ & + (2\pi) \left(0.3183 \cosh(2\pi x) - 0.3195 \sinh(2\pi x) \right) \cos(2\pi y) \end{aligned} \quad (\text{Ec. 47})$$

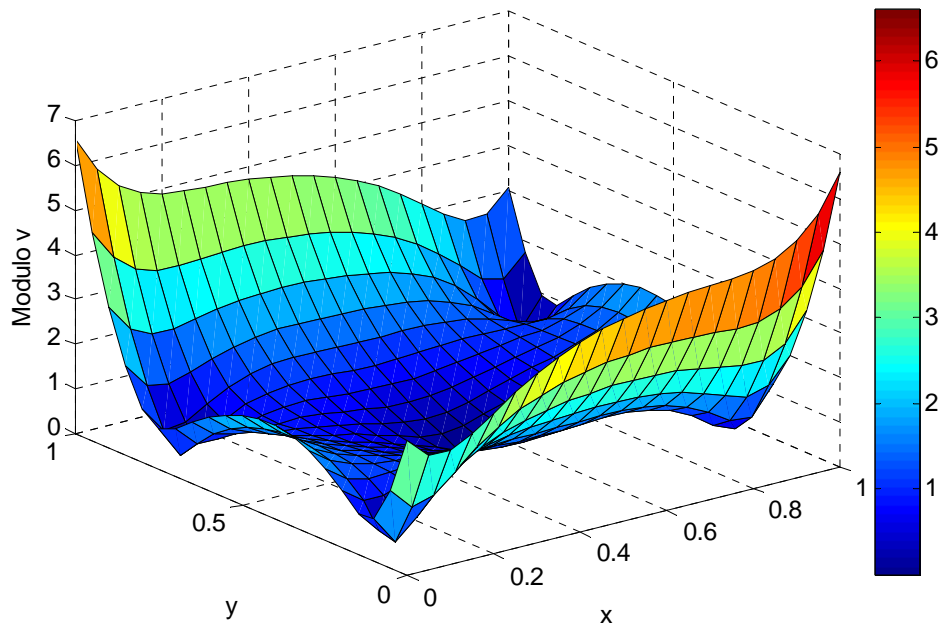


Figura 12: Modulo campo velocidad del viento Ejemplo 2

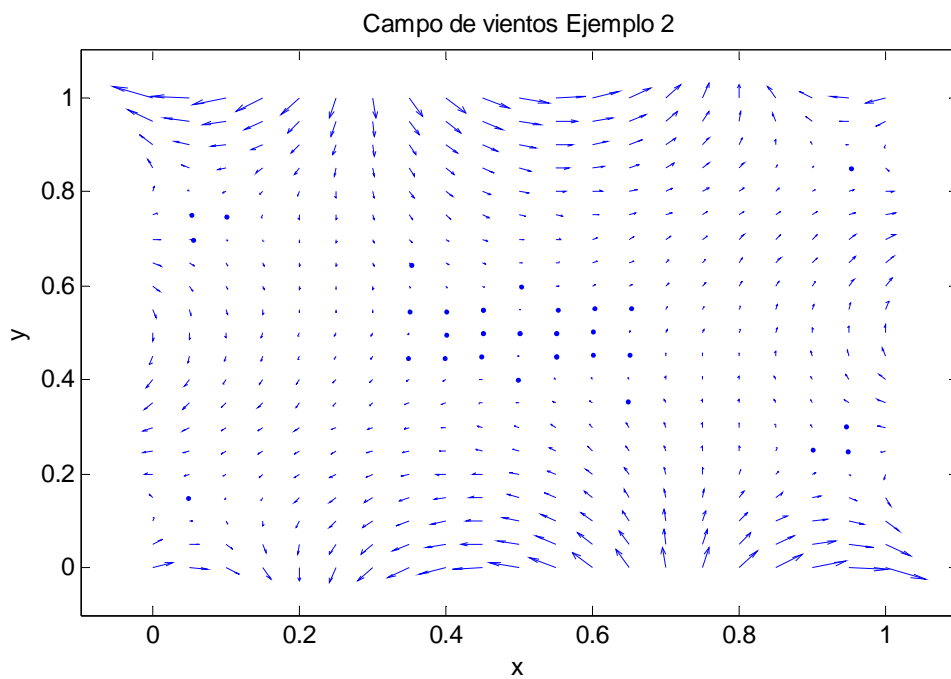


Figura 13: Vectores campo de velocidad del viento Ejemplo 2

En este caso el modulo de la velocidad no posee el valor deseado, al igual que el campo de velocidades que solo es el correcto en los puntos de condiciones de contorno, no siendo como sucedía en el ejemplo anterior una buena aproximación.

3.1.3. Ejemplo 3

El siguiente ejemplo busca quitar cualquier simetría a las condiciones de contorno, con el fin de hacer lo más independiente posible a las ecuaciones. Se han introducido para este ejemplo los siguientes puntos:

- Punto 1: $\vec{x}(x, y) = (0, 0)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(\cos \theta_1, -\sin \theta_1)$
- Punto 2: $\vec{x}(x, y) = (3a/10, 0)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(\cos \theta_2, -\sin \theta_2)$
- Punto 3: $\vec{x}(x, y) = 3/10(a, b)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m3}(\cos \theta_3, -\sin \theta_3)$
- Punto 4: $\vec{x}(x, y) = 3/10(0, b)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m4}(\cos \theta_4, -\sin \theta_4)$

Donde: $v_{m1} = 2.8284$, $v_{m2} = 2.1541$, $v_{m3} = 1.1314$, $v_{m4} = 2.1541$, $\theta_1 = 0.7854rad$, $\theta_2 = 0.3805rad$, $\theta_3 = 0.7854rad$, $\theta_4 = 1.1903rad$ y $a = b = 1$. Siguiendo los pasos descritos en los ejemplos anteriores se llega a las ecuaciones que modelan el campo de vientos, (Ec. 48) y (Ec. 49).

$$\begin{aligned}
 u(x, y) \simeq & (\pi) \left(-10^{-15} \cosh(\pi y) + 10^{-15} \sinh(\pi y) \right) \cos(\pi x) + \\
 & + (2\pi) \left(0.0955 \cosh(2\pi y) - 0.0953 \sinh(2\pi y) \right) \cos(2\pi x) \\
 & + (\pi) \left(-10^{-15} \sinh(\pi x) \right) \sin(\pi y) + \\
 & + (2\pi) \left(-0.0954 \sinh(2\pi x) + 0.0953 \cosh(2\pi x) \right) \sin(2\pi y)
 \end{aligned} \tag{Ec. 48}$$

$$\begin{aligned}
 v(x, y) \simeq & \pi \left(-10^{-15} \sinh(\pi y) + 10^{-15} \cosh(\pi y) \right) \sin(\pi x) + \\
 & + (2\pi) \left(0.0955 \sinh(2\pi y) - 0.0953 \cosh(2\pi y) \right) \sin(2\pi x) + \\
 & + (\pi) \left(-10^{-15} \sinh(\pi x) \right) \cos(\pi y) + \\
 & + (2\pi) \left(-0.0954 \cosh(2\pi x) + 0.0953 \sinh(2\pi x) \right) \cos(2\pi y)
 \end{aligned} \tag{Ec. 49}$$

Una vez determinadas las ecuaciones que aproximan u y v , para comprobar el resultado de dicha aproximación se representa el valor de u y v en todos los puntos del volumen de control, cuyas representaciones pueden observarse en la Figura 14 y en la Figura 15.

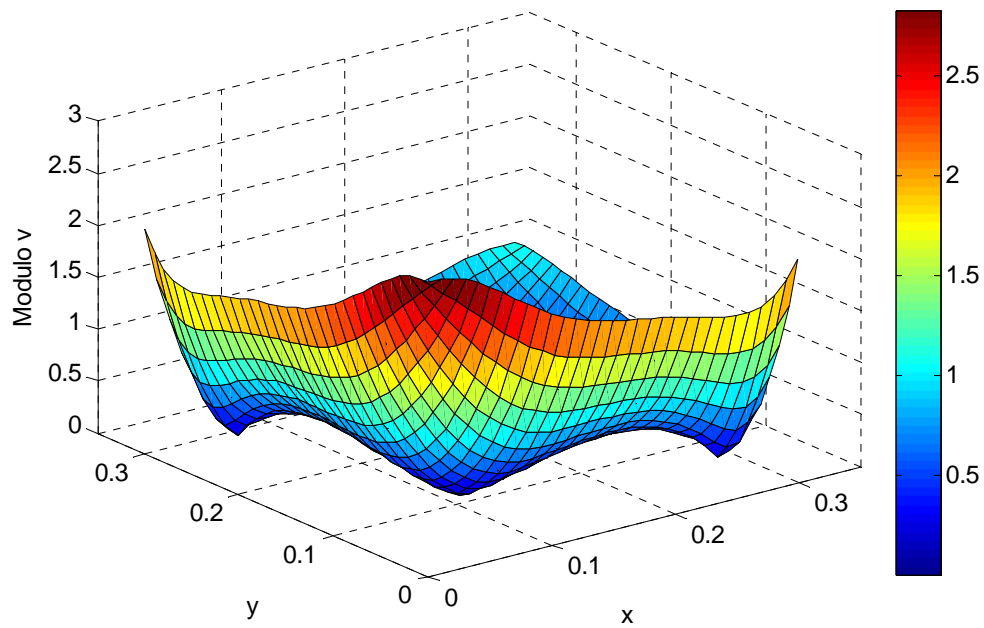


Figura 14: Modulo de la velocidad campo de vientos Ejemplo 3

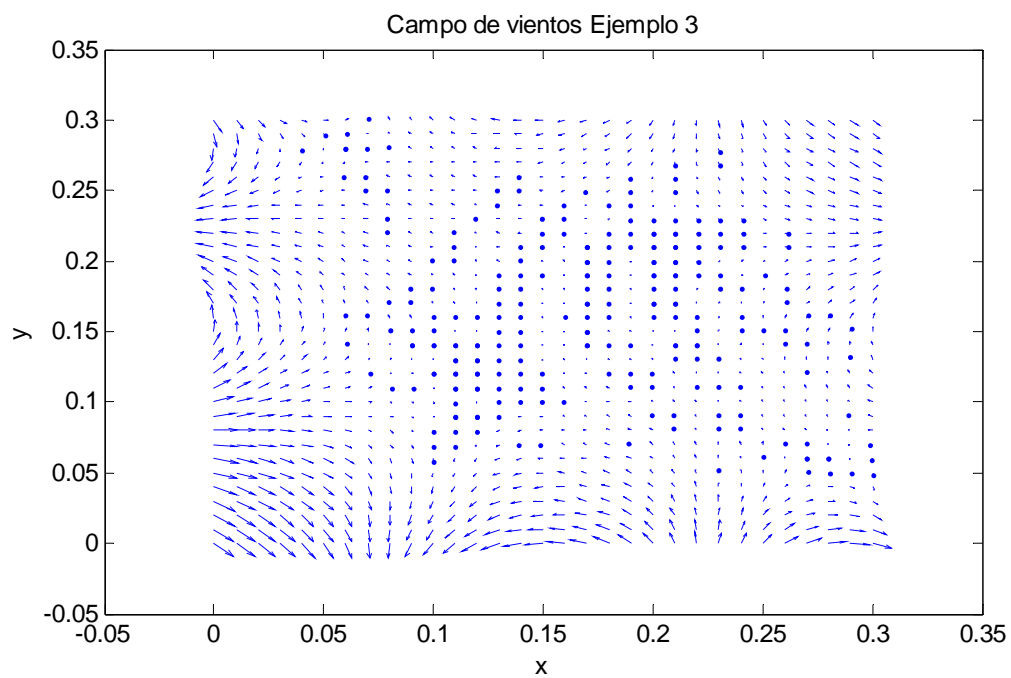


Figura 15: Vectores campo velocidades del viento Ejemplo 3

Tras analizar las figuras se puede llegar a la misma conclusión que en el caso anterior, la aproximación calculada no representa el campo de vientos real.

3.1.4. Ejemplo 4

Finalmente se resolverá introduciendo más puntos del contorno como datos, añadiendo por tanto más términos a las ecuaciones de u y de v , los puntos seleccionados son los siguientes:

- Punto 1: $\vec{x}(x, y) = (0, 0)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(\cos \theta_1, -\sin \theta_1)$
- Punto 2: $\vec{x}(x, y) = (a/2, 0)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(1, 0)$
- Punto 3: $\vec{x}(x, y) = (a, 0)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$
- Punto 4: $\vec{x}(x, y) = (a, b/2)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(0, -1)$
- Punto 5: $\vec{x}(x, y) = (a, b)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(\cos \theta_1, \sin \theta_1)$
- Punto 6: $\vec{x}(x, y) = (a/2, b)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(-1, 0)$
- Punto 7: $\vec{x}(x, y) = (0, b)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m1}(-\cos \theta_1, -\sin \theta_1)$
- Punto 8: $\vec{x}(x, y) = (0, b/2)$, $\vec{v}(u, v) = v_{m2}(0, -1)$

Resolviendo con Matlab el sistema de 16 ecuaciones con 16 incógnitas se para los siguientes datos: $v_{m1} = 2.8284$, $v_{m2} = 2$, $\theta_1 = 0.7854 \text{ rad}$ y $a = b = 1$, se obtiene la aproximación representada por las ecuaciones (Ec. 50) y (Ec. 51).

$$\begin{aligned}
 u(x, y) \simeq & (\pi) \left(2 \cdot 10^{-12} \cosh(\pi y) - 4.4 \cdot 10^{-12} \sinh(\pi y) \right) \cos(\pi x) + \\
 & + (2\pi) \left(7.4 \cdot 10^{-13} \cosh(2\pi y) - 1.5 \cdot 10^{-13} \sinh(2\pi y) \right) \cos(2\pi x) + \\
 & + (3\pi) \left(2.4 \cdot 10^{-13} \cosh(3\pi y) - 3.7 \cdot 10^{-13} \sinh(3\pi y) \right) \cos(3\pi x) + \\
 & + (4\pi) \left(0.159 \cosh(4\pi y) - 0.159 \sinh(4\pi y) \right) \cos(4\pi x) + \\
 & + (\pi) \left(-1 \cdot 10^{-12} \sinh(\pi x) + 0.8 \cdot 10^{-12} \cosh(\pi x) \right) \sin(\pi y) + \\
 & + (2\pi) \left(7.9 \cdot 10^{-14} \sinh(2\pi x) + 9.6 \cdot 10^{-14} \cosh(2\pi x) \right) \sin(2\pi y) + \\
 & + (3\pi) \left(3.4 \cdot 10^{-14} \sinh(3\pi x) + 3.1 \cdot 10^{-14} \cosh(3\pi x) \right) \sin(3\pi y) + \\
 & + (4\pi) \left(-0.1591 \sinh(4\pi x) + 0.1591 \cosh(4\pi x) \right) \sin(4\pi y) +
 \end{aligned} \tag{Ec. 50}$$

$$\begin{aligned}
v(x, y) \approx & \pi \left(2 \cdot 10^{-12} \sinh(\pi y) - 4.4 \cdot 10^{-12} \cosh(\pi y) \right) \sin(\pi x) + \\
& + (2\pi) \left(7.4 \cdot 10^{-13} \sinh(2\pi y) - 1.5 \cdot 10^{-13} \cosh(2\pi y) \right) \sin(2\pi x) + \\
& + (3\pi) \left(2.4 \cdot 10^{-13} \sinh(3\pi y) - 3.7 \cdot 10^{-13} \cosh(3\pi y) \right) \sin(3\pi x) + \\
& + (4\pi) \left(0.159 \sinh(4\pi y) - 0.159 \cosh(4\pi y) \right) \sin(4\pi x) + \\
& + (\pi) \left(-1 \cdot 10^{-12} \cosh(\pi x) + 0.8 \cdot 10^{-12} \sinh(\pi x) \right) \cos(\pi y) + \\
& + (2\pi) \left(7.9 \cdot 10^{-14} \cosh(2\pi x) + 9.6 \cdot 10^{-14} \sinh(2\pi x) \right) \cos(2\pi y) + \\
& + (3\pi) \left(3.4 \cdot 10^{-14} \cosh(3\pi x) + 3.1 \cdot 10^{-14} \sinh(3\pi x) \right) \cos(3\pi y) + \\
& + (4\pi) \left(-0.1591 \cosh(4\pi x) + 0.1591 \sinh(4\pi x) \right) \cos(4\pi y)
\end{aligned}
\tag{Ec. 51}$$

Para concluir evaluando la validez de las ecuaciones (Ec. 50) y (Ec. 51), se representa gráficamente el módulo de la velocidad (Figura 16) y campo de vectores dentro del volumen de control considerado (Figura 17).

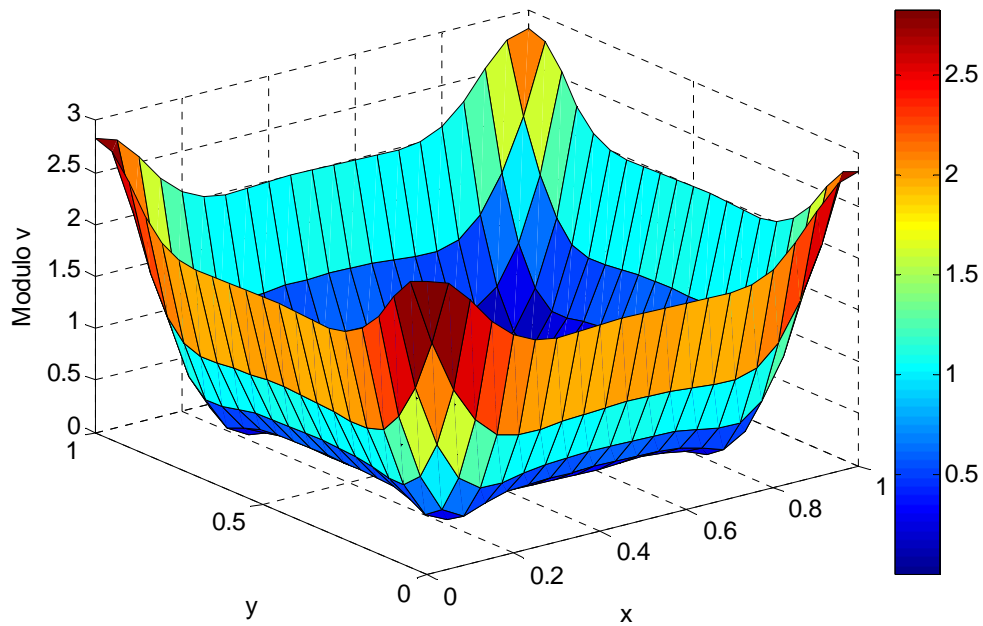


Figura 16: Módulo de la velocidad campo de vientos Ejemplo 4

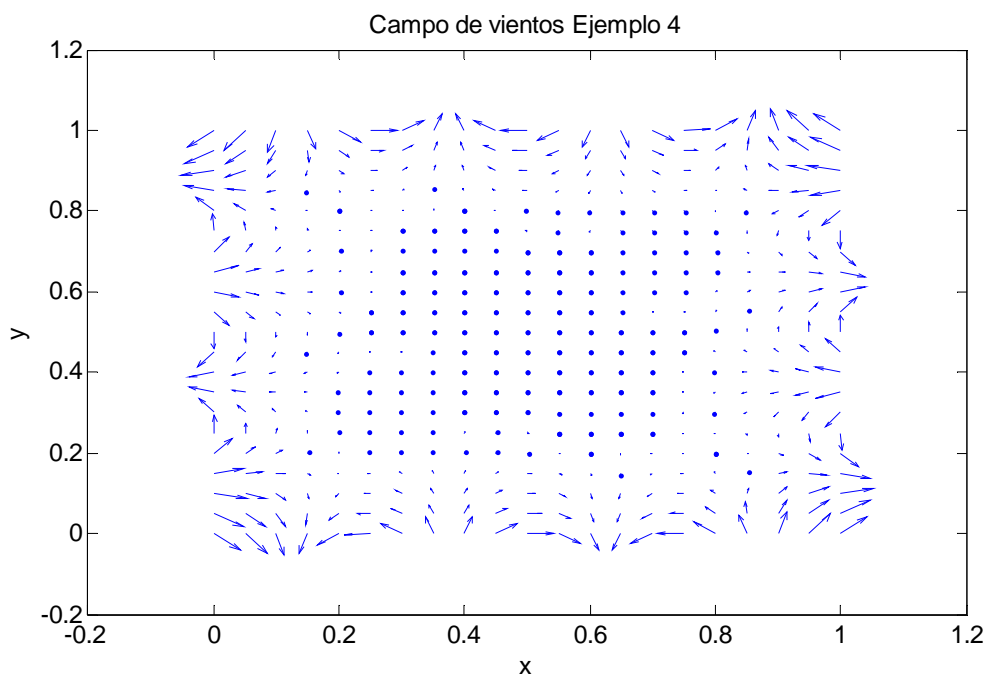


Figura 17: Vectores campo de viento Ejemplo 4

Como se observa en las figuras anteriores, el modelo empleado no es válido ya que no se asemeja al campo de vectores reales representado en la Figura 9.

3.1.5. Conclusión

Tras analizar los cuatro ejemplos anteriormente expuestos se llega a la conclusión de que este modelo analítico de resolución no es aceptable para la problemática planteada. A pesar de eso cabe pensar que si se dispusieran de infinitos puntos en la frontera sería capaz el modelo de representar el torbellino, ya que al observar los resultados del ejemplo 4 en el que al imponer más puntos del contorno se obtuvo una mejor aproximación, siendo esta suposición un caso ideal puesto que nunca se darán esas condiciones.

3.2. Resolución Mediante El Método De Galerkin

Tras el intento de resolución mediante funciones trigonométricas y concluir que no es posible su utilización debido a que se precisa la definición de las condiciones de contorno (frontera), se comienza con el análisis a través del método de Galerkin. Ya que este es un método que no está sujeto a una malla fija y por lo tanto es el que mejor se adaptará a la problemática analizada en el presente proyecto. Donde los datos dispuestos serán valores muestrales puntuales de los mensajes ADS-B de las aeronaves, siendo estos valores diferentes en tiempo y espacio, a diferencia de si se dispusiera de una estación meteorológica, cuya posición es siempre la misma.

3.2.1. Imponiendo velocidad en los nodos.

En el presente apartado se calculará una aproximación de las componentes de la velocidad basándonos en el valor de la velocidad del viento en unos puntos determinados del dominio (nodos).

Se deseará calcular una estimación para la componente u y v de la velocidad definidas a partir de la función de corriente (Ec. 52).

$$\Phi = \sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij} x^i y^j \quad (\text{Ec. 52})$$

$$u^h(\vec{x}) = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \sum_{i=0} \sum_{j=0} j \cdot a_{ij} x^i y^{j-1} \quad (\text{Ec. 53})$$

$$v^h(\vec{x}) = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\sum_{i=0} \sum_{j=0} i \cdot a_{ij} x^{i-1} y^j \quad (\text{Ec. 54})$$

Donde: $u^h(\vec{x})$ y $v^h(\vec{x})$ son las funciones aproximantes de $u(\vec{x})$ y $v(\vec{x})$ respectivamente, que son las componentes del campo de velocidades del viento en el dominio considerado. La definición realizada en las (Ec. 53), (Ec. 54) permite que se cumpla la ecuación de continuidad para un fluido incompresible (Ec. 55), verificando por lo tanto la hipótesis de que el aire al tener una velocidad relativamente baja puede considerarse como un fluido incompresible [10].

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}}_{\partial u / \partial x} + \underbrace{\left(-\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)}_{\partial v / \partial y} = \sum_{i=0} \sum_{j=0} ij \cdot a_{ij}(\vec{x}) \cdot x^{i-1} \cdot y^{j-1} - \sum_{i=0} \sum_{j=0} ij \cdot a_{ij}(\vec{x}) \cdot x^{i-1} \cdot y^{j-1} = 0 \quad (\text{Ec. 55})$$

Obsérvese que las ecuaciones (Ec. 53) y (Ec. 54) serán ciertas siempre y cuando la $\frac{\partial a_{ij}}{\partial x}$ y la $\frac{\partial a_{ij}}{\partial y}$ sean nulas. Hecho que puede suponerse cierto debido a que si se disponen de puntos de puntos de observación uniformemente distribuidos en torno al punto donde se desea aproximar la función u y v , los valores de a_{ij} en torno al punto serán aproximadamente constantes.

Las ecuaciones (Ec. 53) y (Ec. 54) corresponden a la aproximación de una función según el método de *Element Free Galerkin* descrito en el apartado 1.3. En el que los coeficientes $\underline{a}(\vec{x})$ de la ecuación (Ec. 13) se corresponde con $\sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij}(\vec{x})$ y el vector de monomios $\underline{p}(\vec{x})$ de la (Ec. 14) se

corresponde con $\sum_{i=0}^j x^i y^{j-i}$ para la aproximación de $u(\vec{x})$ y $\sum_{i=1}^j -ix^{i-1}y^j$ para la aproximación de $v(\vec{x})$.

El objetivo para el cálculo de las funciones aproximantes es determinar los coeficientes $a_{ij}(\vec{x})$, para lo cual se ha empleado 2 campos de vientos reales (uno más turbulento y otro más laminar) con el fin de evaluar el modelo en dos escenarios desiguales, cuyos valores han sido extraídos del programa UGRIB (<http://www.grib.us/>). En el Anexo 2 se pueden observar las capturas realizadas para los distintos campos de vientos del programa anteriormente mencionado, así como unas tablas con el valor de la velocidad y dirección del viento y la presión en los puntos incluidos en el estudio. Simulando éstos, puntos de posicionamiento de aeronaves dentro de un espacio aéreo.

Con la ayuda del programa Matlab se ha desarrollado una herramienta que permitirá elegir el orden máximo de Φ , así como el número de aeronaves que se encuentran en el espacio aéreo analizado (volumen de control), la selección de dichas aeronaves se va a realizar de forma aleatoria de entre todos los puntos de observación (véase puntos de observación en el Anexo 2).

Posteriormente se calculan los coeficientes $a_{ij}(\vec{x})$, es decir, se determinará los valores a_{ij} de cada punto del espacio aéreo considerado. Se ha de resolver para tal fin la ecuación (Ec. 13) del apartado 1.3, construyendo la matriz \underline{A} y \underline{B} para cada punto en donde se desee aproximar la función u y v .

Como se ha expuesto en la ecuación (Ec. 10), la matriz \underline{P} está formada por filas de cada uno de los términos del vector de monomios evaluado en cada uno de los puntos de observación seleccionados (n puntos).

Se ha empleado como vector de monomios de Φ el que se presenta a continuación, el cual pertenecerá un espacio de dimensión \mathbb{R}^m :

$$p_{\Phi}^T(\vec{x})_{1 \times m} = \{1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3, \dots, xy^{r-1}, y^r\}$$

Tabla 3: Construcción del vector de monomios de Φ

Grado Φ		Nº Términos P_{ψ} $\left[\sum_{i=1}^{i=\text{Grado } \Phi+1} i \right]$
0	1	1
1	x y	3
2	x ² xy y ²	6
3	x ³ x ² y xy ² y ³	10
4	x ⁴ x ³ y x ² y ² xy ³ y ⁴	15

Tabla 4: Construcción del vector de monomios de u

Grado Φ										
0	0									
1	0					1				
2	0			x			$2y$			
3	0		x^2		x^2y			$3y^2$		
4	0		x^3		x^2y		x^2y^2		$4y^3$	
...	...									
$r = w^2$	0	x^{r-1}	$x^{r-2}y^2$...	$x^w w \cdot y^{w-1}$...	$x^2(r-2)y^{r-3}$	$x(r-1)y^{r-2}$	ry^{r-1}	

En la Tabla 5 se tienen los términos del vector de monomios de v , calculados como la menos derivada del los elementos correspondientes al vector $p_\Phi(\vec{x})$ respecto de x , como se ha mencionado anteriormente, siendo al igual que el vector $p_u(\vec{x})$ anterior, de orden $r-1$.

$$p_v^T(\vec{x})_{1 \times m-(r+1)} = -\{1, 2x, y, 3x^2, 2xy, y^2, 4x^3, 3x^2y, 2xy^2, y^3, \dots, 4x^3y^{r-4}, 3x^2y^{r-3}, 2xy^{r-2}, y^{r-1}\}$$

Tabla 5: Construcción del vector de monomios de v

Grado Φ										
0	0									
1	1					0				
2	$2x$			y			0			
3	$3x^2$		x^2y		y^2			0		
4	$4x^3$		x^3y		$2xy^2$		y^3		0	
...	...									
$r = w^2$	$r \cdot x^{r-1}$	$(r-1)x^{r-2}y$	$(r-2)x^{r-3}y^2$...	$w \cdot x^{w-1}y^w$...	$2xy^{r-2}$	y^{r-1}	0	

Donde m es el número de elementos del vector p_Φ para un orden máximo del mismo de valor r . Para que sea un problema compatible debe de ser $n \geq m$, es decir, que el número de puntos de observación debe ser mayor o igual que el número de coeficientes a_{ij} .

En lo que respecta a la matriz de ponderación $\underline{\underline{W}}(\vec{x})$ que se muestra en la (Ec. 11) decir que está formada por las funciones de ponderación $w_i(\vec{x} - \vec{x}_i)$ definida en la ecuación (Ec. 25), en el que se pone manifiesto el peso que tiene el dato ubicado en \vec{x}_i si se realiza la aproximación en el punto \vec{x} del espacio aéreo considerado (véase apartado 1.3.1.2). Tras tratarse de un escenario en el que existen pocos puntos de observación próximos, hecho que no sucedería en un espacio aéreo real, se ha considerado el radio de influencia d_{mi} de la (Ec. 25) lo suficientemente grande

como para no rechazar ningún dato. Este hecho permitirá tener un número mayor de puntos de observación para determinar los coeficientes a_{ij} (con el fin de que n sea mayor o igual que m).

Finalmente para poder calcular los coeficientes a_{ij} (véase (Ec. 13)) se necesita definir también la matriz columna $\underline{u}_{n \times 1}$, formada por los valores de las componentes de la velocidad en los puntos de observación (véase (Ec. 8)). Debido a la imposición realizada inicialmente de que a_{ij} sean iguales⁶ en la componente u y en la componente v , la matriz columna $\underline{u}_{n \times 1}$ puede formarse por los $\frac{n}{2}$ primeros términos correspondientes a la componente u de la velocidad del viento, mientras que los $\frac{n}{2}$ finales corresponderán a la componente v , lo mismo ocurrirá con la matriz \underline{P} y $\underline{W}(\vec{x})$, de esta manera se dispone del doble de ecuaciones para la resolución de los coeficientes.

Una vez determinados los coeficientes a_{ij} calculados en cada punto del espacio aéreo donde se desea la estimación, se dispone de una aproximación de cada componente de la velocidad del viento para cada punto del espacio aéreo ($u_{\vec{x}}^h(\vec{x}) = \underline{p}_u^T(\vec{x}) \cdot \underline{a}_{\vec{x}}$ y $v_{\vec{x}}^h(\vec{x}) = \underline{p}_v^T(\vec{x}) \cdot \underline{a}_{\vec{x}}$).

En último lugar es necesario evaluar la aproximación realizada, así como seleccionar el grado máximo del vector de monomios y el número de puntos de observación, que mejor estiman las componentes de la velocidad del viento.

Al disponer de los datos de las medidas de posición y velocidad del viento (Anexo 2) en todos los puntos del espacio aéreo, se puede calcular el error cometido en todos los puntos del mismo. Con los errores a su vez se puede calcular un estadístico que represente la desviación que poseen los valores medidos (u y v) y los valores estimados (u^h y v^h). En la (Ec. 56) se tiene la matriz de covarianza de la estimación con relación a los valores medidos de la velocidad del viento, donde el estadístico más representativo para evaluar la estimación realizada será la traza de dicha matriz, ya que será el valor máximo de las desviaciones producidas.

En las ecuaciones (Ec. 57), (Ec. 58) y (Ec. 59) se tienen los estadísticos correspondientes a la desviación de los valores medidos frente a los estimados de la componente u , la de la componente v y la de $u \cdot v$ respectivamente.

⁶ Nótese que se tendrán valores en la componente u que en la componente v serán 0 y viceversa, por lo que aunque no exista un a_{ij} para cada componente de la velocidad (u, v) , las expresiones de ambas serán diferentes. Recuérdese que esta consideración ha sido necesaria para forzar al cumplimiento de la ecuación de continuidad para los fluidos incompresibles.

$$\begin{aligned}
E\left[(\vec{v}^h - \vec{v}) \cdot (\vec{v}^h - \vec{v})^T\right] &= E\left[\begin{pmatrix} u^h - u \\ v^h - v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u^h - u & v^h - v \end{pmatrix}\right] = \\
&= E\left[\begin{pmatrix} (u^h - u)^2 & (u^h - u)(v^h - v) \\ (u^h - u)(v^h - v) & (v^h - v)^2 \end{pmatrix}\right] = \\
&= \begin{bmatrix} E\left[(u^h - u)^2\right] & E\left[(u^h - u)(v^h - v)\right] \\ E\left[(u^h - u)(v^h - v)\right] & E\left[(v^h - v)^2\right] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Est_{xx} & Est_{xy} \\ Est_{xy} & Est_{yy} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{Ec. 56}$$

$$Est_{xx} = \frac{\sum_1^n (u^h - u)^2}{n} = \frac{\sum_1^n (err_{xx})^2}{n} \tag{Ec. 57}$$

$$Est_{yy} = \frac{\sum_1^n (v^h - v)^2}{n} = \frac{\sum_1^n (err_{yy})^2}{n} \tag{Ec. 58}$$

$$Est_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i^h - u_i)(v_i^h - v_i)}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n err_{xx} err_{yy}}{n} \tag{Ec. 59}$$

En la Figura 24, Figura 25, Figura 26 y Figura 27 se tienen las representaciones de la traza⁷ de la matriz de la ecuación (Ec. 57) en función del grado de la función de corriente y en función también del número de puntos de observación, con el fin de seleccionar los puntos donde se hace mínimo el valor de la traza si se dispone de una región donde el campo de vientos es más turbulento. Tas un análisis de las mismas se puede llegar a las siguientes conclusiones:

- Cuando aumenta el grado de la función de corriente se precisan más puntos para el cálculo de los coeficientes. Los valores más altos de la traza se localizan donde los puntos de observación son iguales o algo mayores al número de coeficientes. Los mejores valores se obtienen, analizando el caso del campo de viento más turbulento, para un grado cuarto o superior de la función de corriente y un número de puntos de observación en torno a 30 o superior, posteriormente se analizará grado de Φ por grado de Φ el número de puntos de observación mínimo que se necesita para alcanzar el valor estacionario de la traza (valor mínimo para el cual se garantizan los mejores resultados del modelo).
 - Grado 3 de la función de corriente: Se precisará determinar 9 coeficientes (incógnitas), por lo tanto se necesitará al menos 9 puntos de observación, aunque analizando la Figura 19 que representa la traza en función del número de puntos

⁷ Recuérdese que la traza es la suma del Est_{xx} más el Est_{yy} .

se llega a la conclusión de que el valor de la traza se estabiliza a partir de 20 puntos de observación.

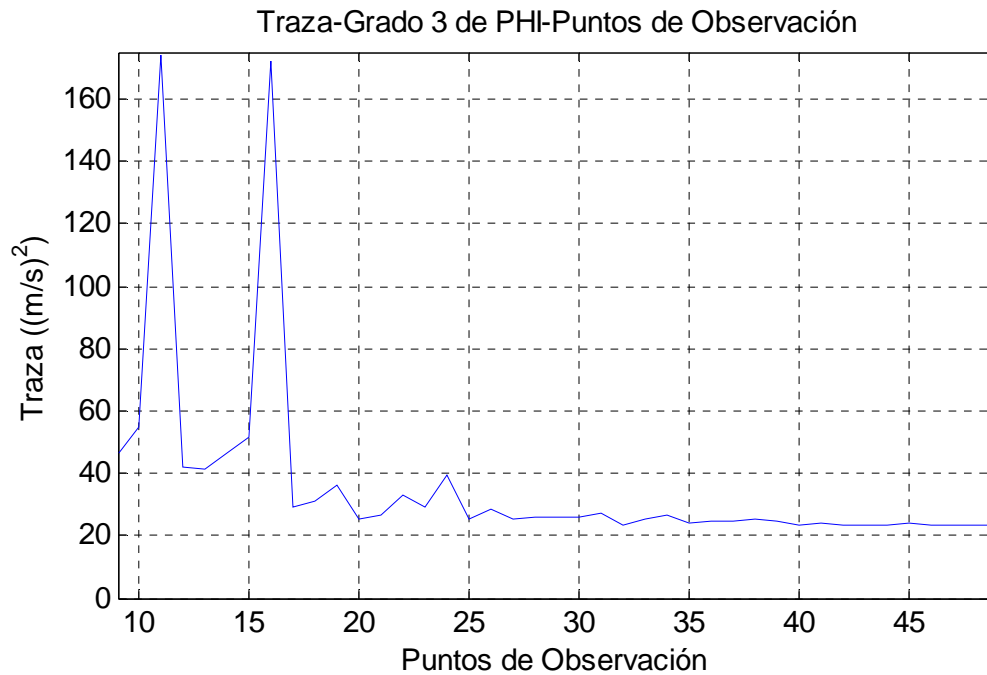


Figura 19: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento

- Grado 4 de la función de corriente: Para la determinación de los 14 coeficientes se deberá disponer al menos de 30 puntos de observación para disponer de unos valores aceptables. (Véase Figura 20)

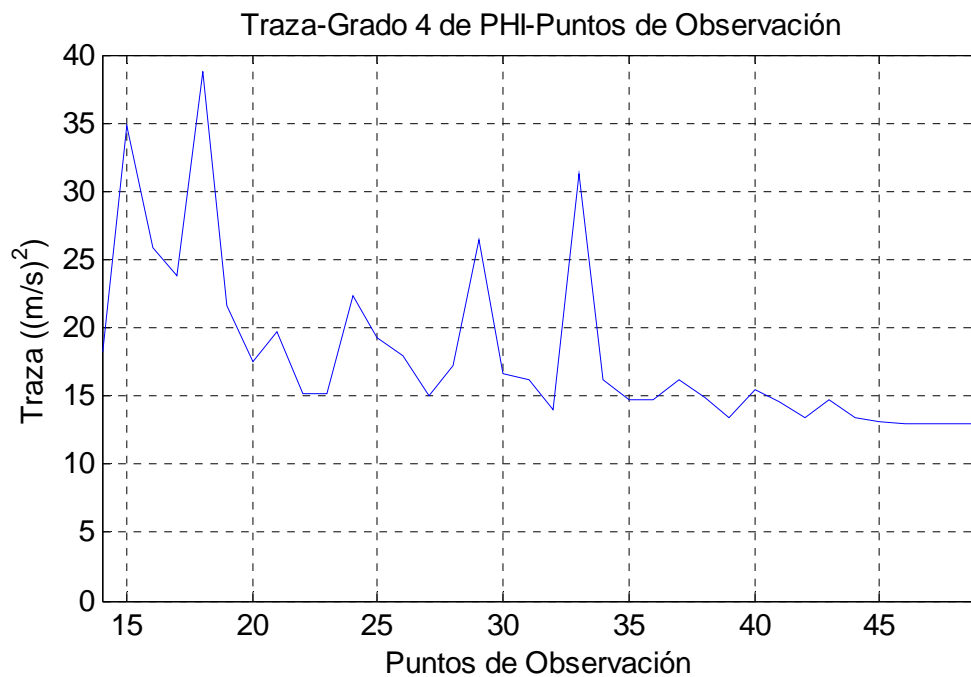


Figura 20: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento

- Grado 5 de la función de corriente: 20 coeficientes a determinar empleando al menos 35 puntos de observación ya que a partir de estos se obtiene el valor transitorio de la traza, tal y como indica la Figura 21 .

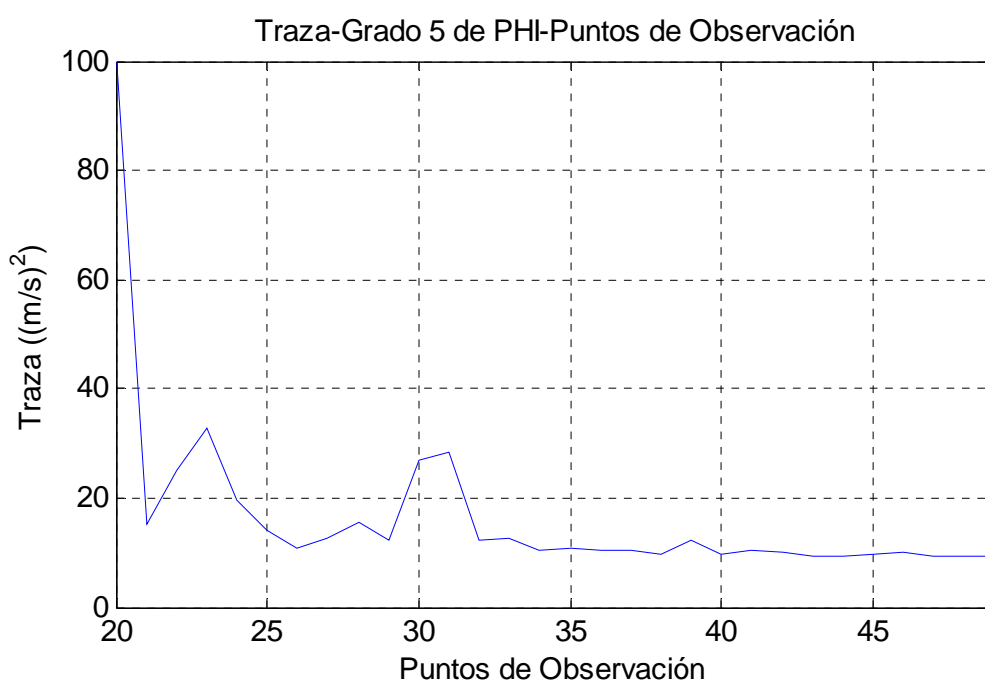


Figura 21: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento

- Grado 6 de la función de corriente: Se tienen 27 coeficientes a determinar dónde para su resolución se necesitarán al menos 27 puntos de observación aunque para conseguir el valor estacionario de la traza representado en la Figura 22 se deberá disponer de al menos 40 puntos de observación.

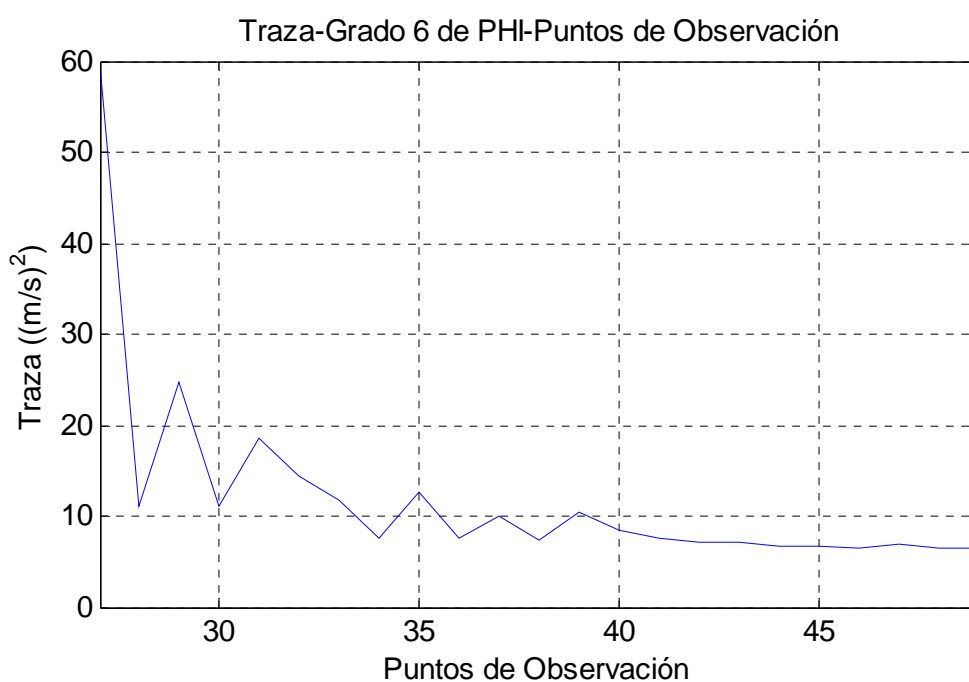


Figura 22: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento

- Grado 7 de la función de corriente: 35 coeficientes a determinar debiendo disponer de al menos 45 puntos de observación para evitar los valores transitorios de la traza que se observan en la Figura 23.

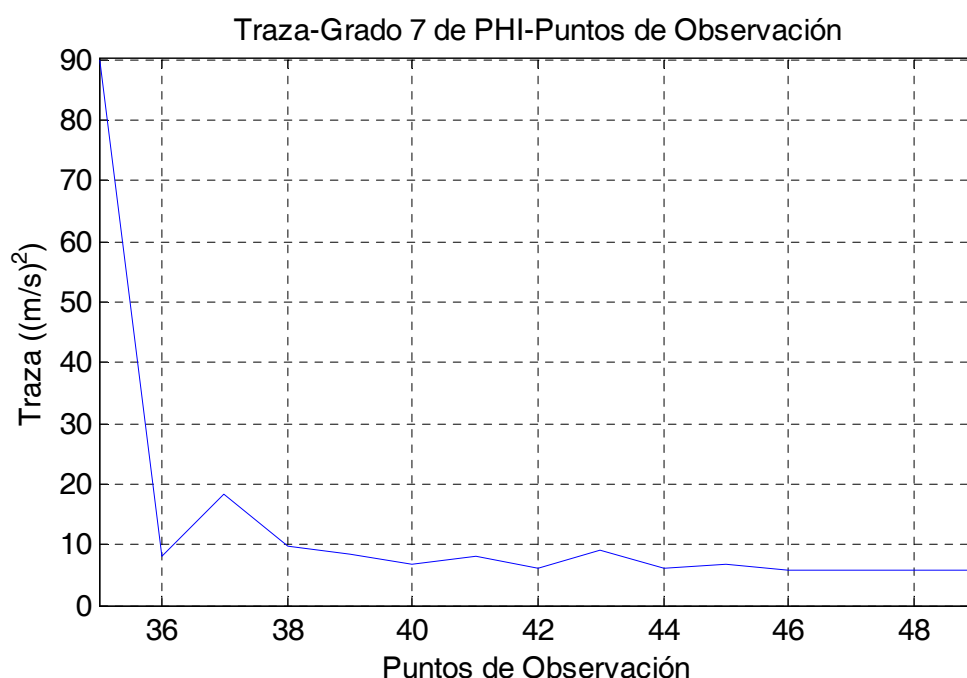


Figura 23: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento

Tabla 6: Resumen Puntos de observación necesarios según el grado de PHI

GRADO Φ	COEFICIENTES A DETERMINAR	PUNTOS DE OBSERVACIÓN	VALOR ESTACIONARIO TRAZA (m^2/s^2)	$\frac{\sqrt{Traza_{Estaci.}}}{\left[\bar{v}\right]_{medTURB}}$ 6,8404m/s
3	9	~ 20 ó superior	25	0,7309
4	14	~ 35 ó superior	15	0,5662
5	20	~ 35 ó superior	10	0,4623
6	27	~ 40 ó superior	6,6	0,3756
7	35	~ 45 ó superior	5,6	0,3459

- Con el fin de analizar la influencia que tienen los errores de estimación de la frontera se han representado la Figura 25, Figura 26, y la Figura 27, donde se han eliminado la última fila, las dos últimas filas y las tres últimas filas respectivamente, véase Figura 28 donde aparece un ejemplo del modelado del campo de vientos indicando las tres zonas mencionadas previamente. Para su construcción se han excluido los valores de los estadísticos ((Ec. 57) y (Ec. 58)) de los puntos frontera, es decir, esos puntos solo aportarán información del estado del campo de vientos, no siendo zona de estimación del mismo.

Se puede observar que los valores de la traza disminuyen sustancialmente en los puntos que representan del grado del polinomio de la función de corriente con el número mínimo de puntos de observación, nótese que las zonas en los que el valor de la traza igual a 0 es a causa de que los puntos de observación son menores a los coeficientes que se desea calcular y por lo tanto el modelo del campo de viento no dispone de solución.

Este hecho es debido a que los puntos frontera tan sólo disponen información de los puntos interiores, mientras que estos últimos poseen información en todo su entorno, así mismo los casos en los que se disponen de poco puntos de observación la estimación de los puntos frontera se ve más empeorada que cuando se dispone de un gran número de puntos, debido a que si ya de por sí para estos puntos frontera se puede tener información de un sector de su entorno (puntos interiores), cuando se tienen pocos puntos de observación la probabilidad de tener muchos puntos de observación en la frontera o sus proximidades es baja y por lo tanto su estimación tendrá mucho error.

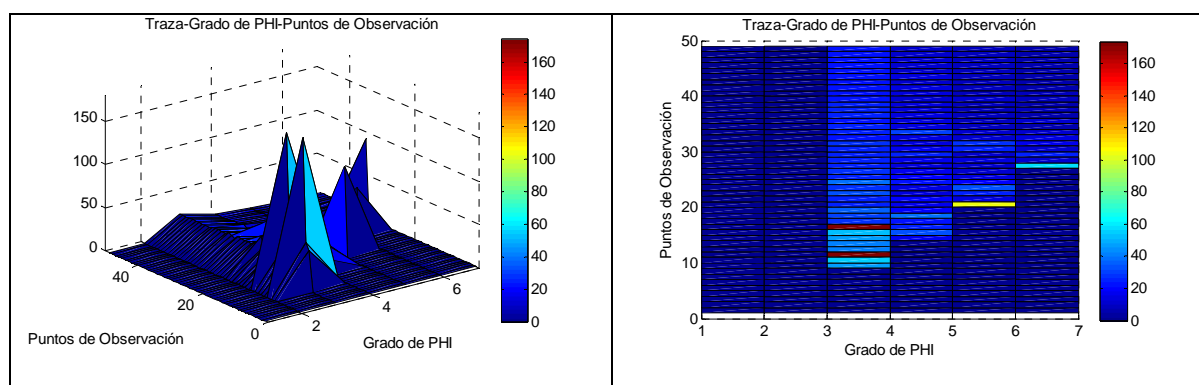


Figura 24: Trazas en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento

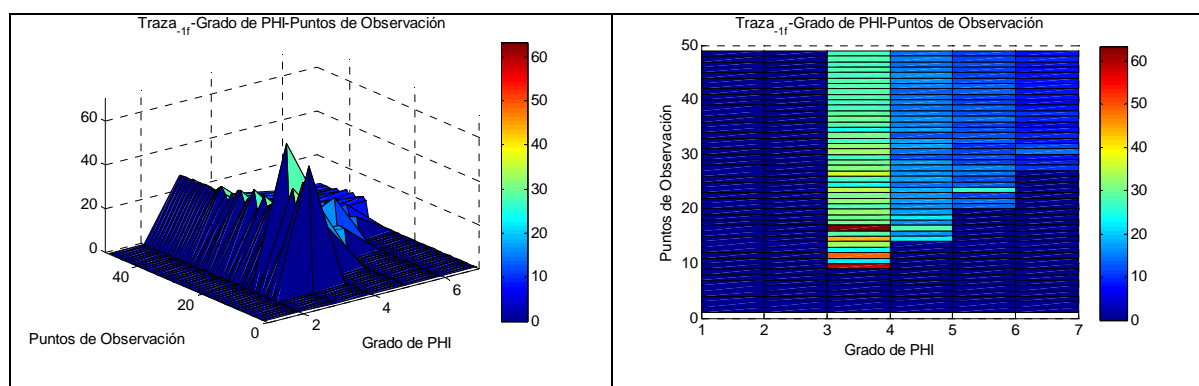


Figura 25: Trazas en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando la última fila (tanto de la parte superior como inferior como laterales)

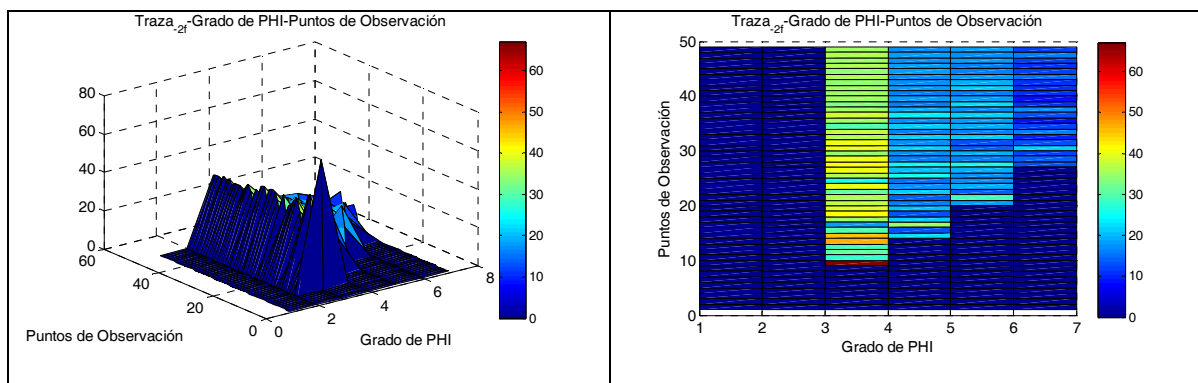


Figura 26: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando las dos últimas filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)

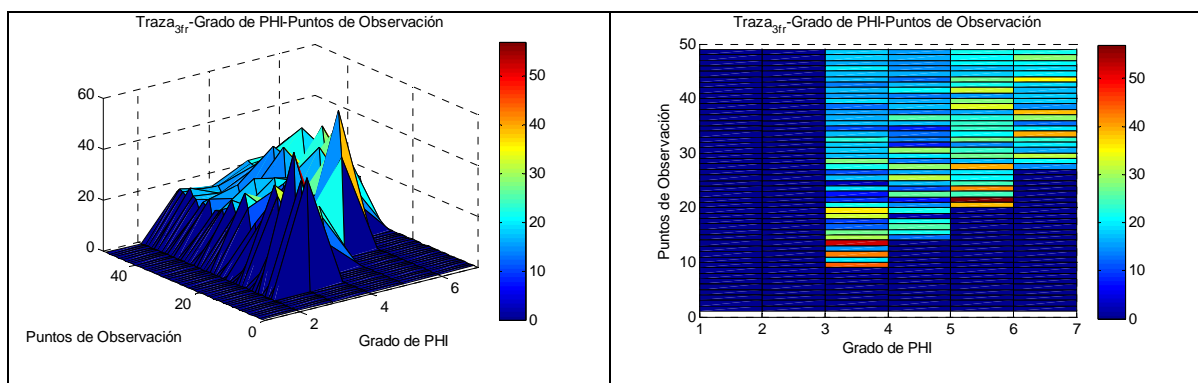


Figura 27: Traza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más turbulento eliminando las tres últimas filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)

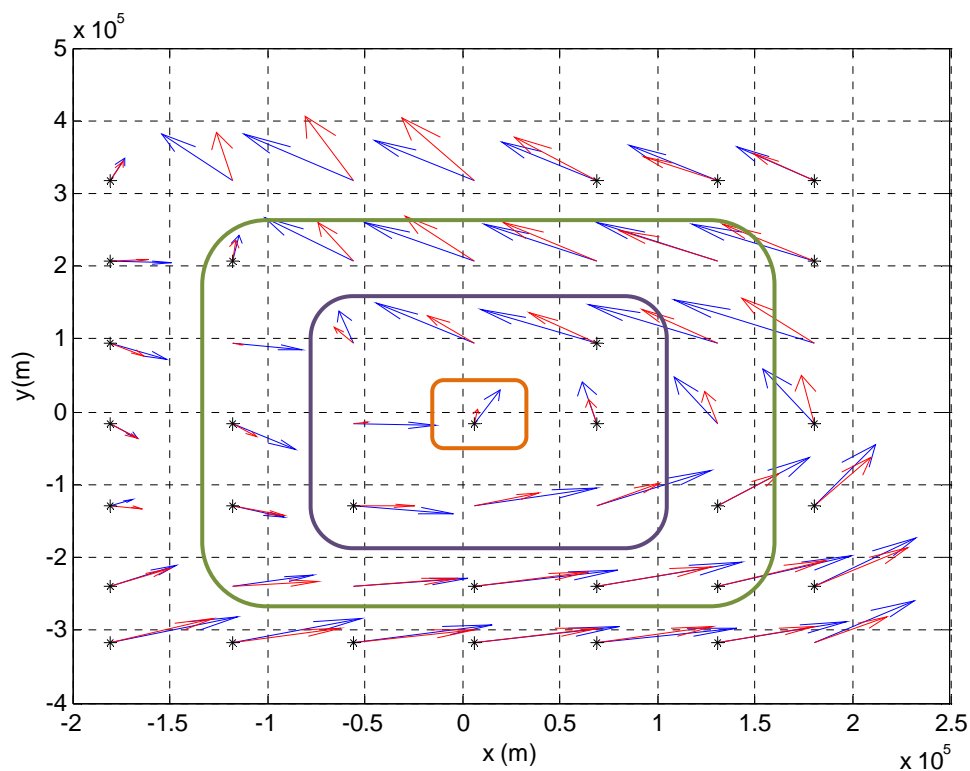


Figura 28: Ejemplo modelo campo de vientos turbulento para PHI grado 5 con 30 puntos de observación. Rojo (Viento estimado), Azul (Viento medido). Zona Verde (Eliminando 1 fila), zona morada (Eliminando 2 filas), zona naranja (Eliminando 3 filas)

A continuación se analizará el grado que debe tener la función de corriente y los puntos de observación necesarios, de manera semejante al caso anterior pero en este momento para un campo de vientos más laminar, con el propósito de seleccionar los puntos donde se hace mínimo el valor de la traza de la matriz de errores (Ec. 56), así como de comparar los errores del modelo con los que se han obtenido en el modelo de vientos más turbulento. Además se realizará un estudio sobre si los puntos frontera, al no disponer de información del estado del campo de vientos en todo su entorno, tienen peores resultados que en los puntos interiores.

- Los mejores valores se obtienen, para el caso del campo de vientos más laminar, empleando un grado tres o superior de la función de corriente y un número de puntos de observación en torno a 40 o superior, posteriormente se detallará caso por caso el número de puntos de observación necesarios para alcanzar el valor estacionario de la traza.
 - Grado 3 de la función de corriente: como se ha mencionado ya en el caso del modelo del campo de vientos más turbulento, se tendrá en este caso 9 coeficientes a determinar bastando con unos 30 puntos de observación para obtener el valor estacionario de la traza, como se observa en la Figura 29.

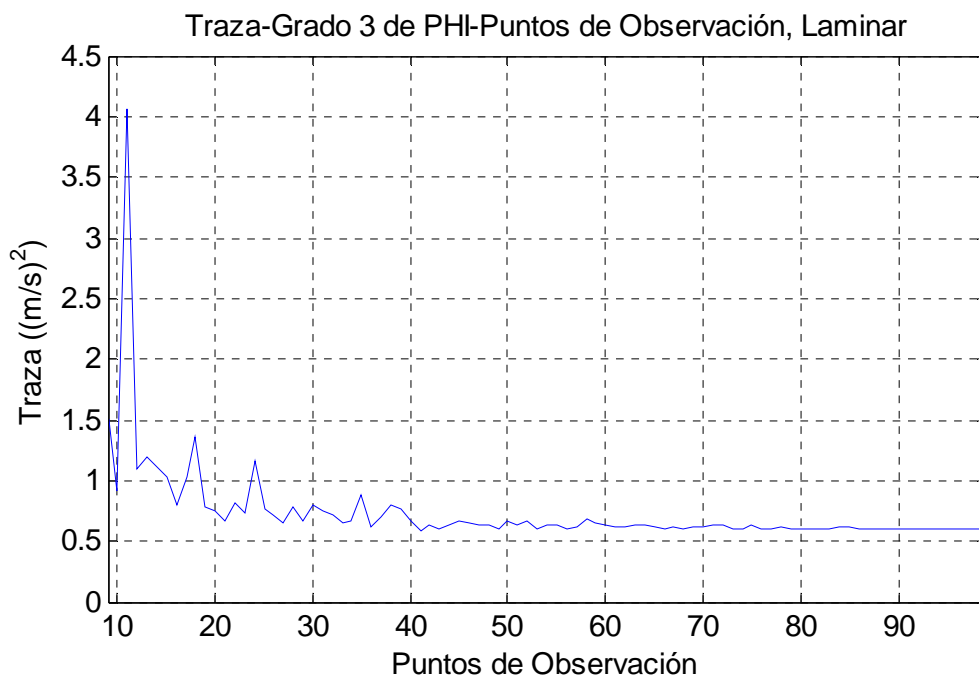


Figura 29: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar

- Grado 4 de la función de corriente: En este caso se necesitará conocer 14 coeficientes necesitando al menos 30 puntos de observación para su resolución. (Véase Figura 30)

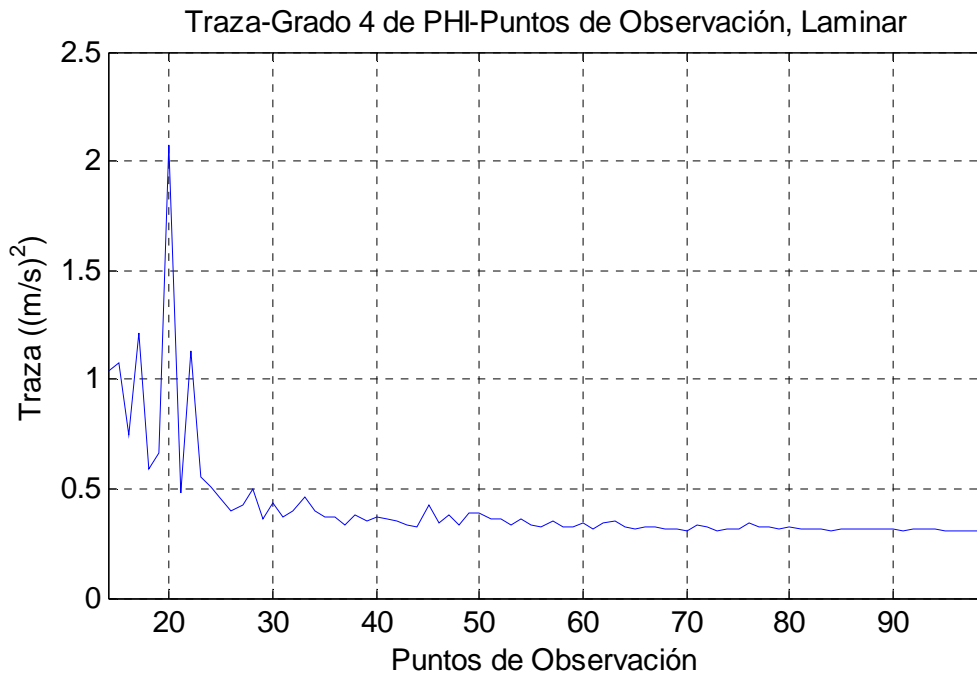


Figura 30: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar

- Grado 5 de la función de corriente: 20 coeficientes a determinar necesitando de al menos 60 puntos de observación para alcanzar el valor estacionario de la traza, como se observa en la Figura 31.

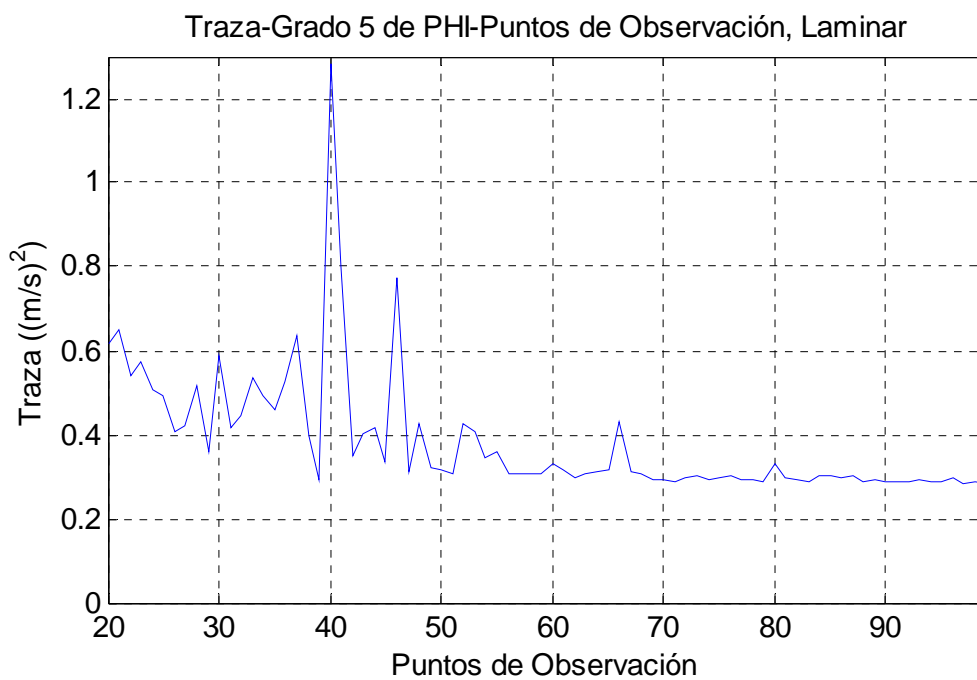


Figura 31: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar

- Grado 6 de la función de corriente: 27 coeficientes a determinar precisando para su resolución al menos 60 puntos de observación, como indica la Figura 32.

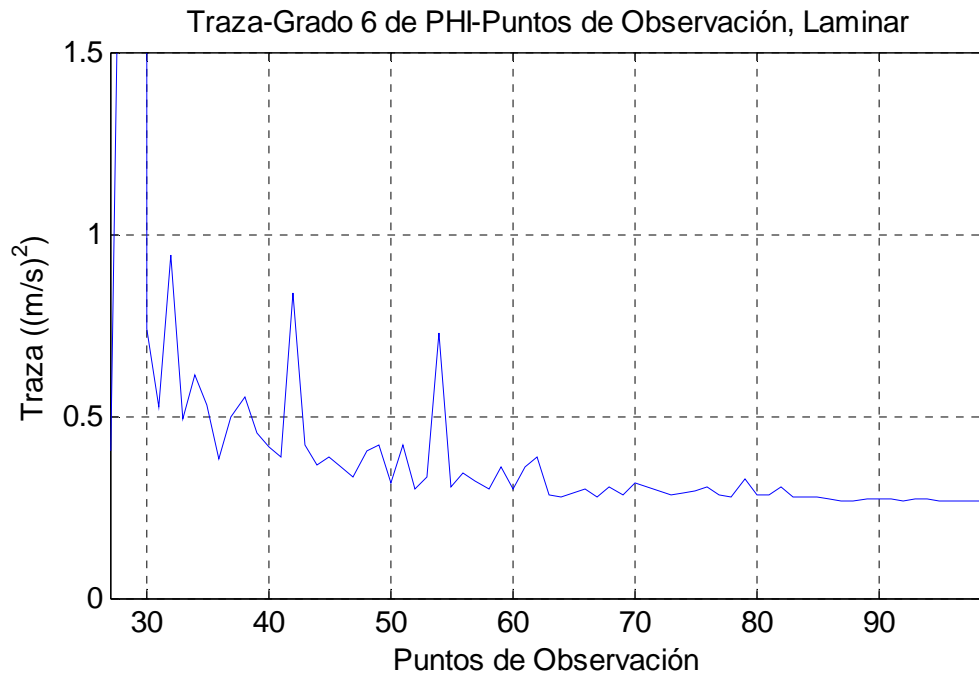


Figura 32: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar

- Grado 7 de la función de corriente: Existiendo 35 coeficientes a determinar necesitando al menos 70 puntos para alcanzar el valor estacionario de la traza. (Véase Figura 33)

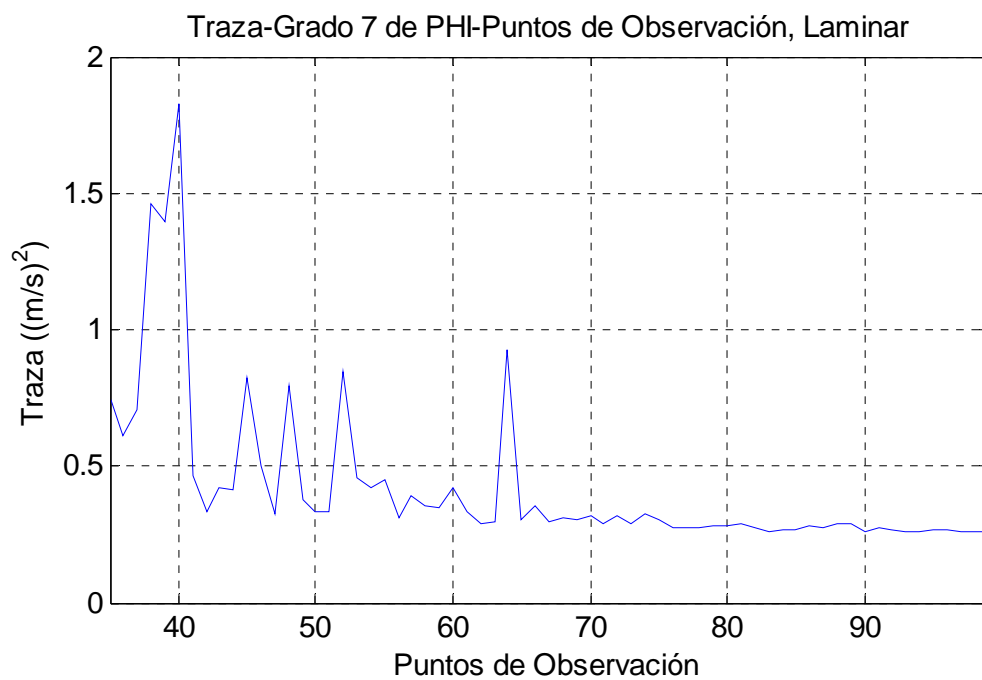


Figura 33: Valor de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más laminar

GRADO Φ	COEFICIENTES A DETERMINAR	PUNTOS DE OBSERVACIÓN	VALOR ESTACIONARIO TRAZA (m^2/s^2)	$\sqrt{\text{Traza}_{\text{Estaci.}}}$ $\underbrace{ \bar{v} _{\text{medLAM}}}_{3,3460m/s}$
3	9	~ 30 ó superior	0,6024	0,2320
4	14	~ 30 ó superior	0,312	0,1669
5	20	~ 60 ó superior	0,2847	0,1595
6	27	~ 60 ó superior	0,2652	0,1539
7	35	~ 70 ó superior	0,2625	0,1531

- Al igual que en el caso del campo de viento más turbulento, con el fin de evaluar la influencia de los puntos frontera, se han eliminando la última fila, las dos últimas filas y las tres últimas representadas en la Figura 34, la Figura 35, Figura 36 y la Figura 37 respectivamente. Véase Figura 38, donde aparece un ejemplo del modelado del campo de vientos indicando las tres zonas mencionadas previamente.

Analizando las figuras se observa que la frontera afecta negativamente en los valores de la traza, lo cual indica que son puntos donde se comete mucho error al estimar las componentes de la velocidad del viento, debido a que en los puntos frontera tan solo se dispone de información de los puntos interiores mientras que en los puntos interiores se dispone de información del estado del viento en todo sus alrededores, como ya se ha mencionado anteriormente.

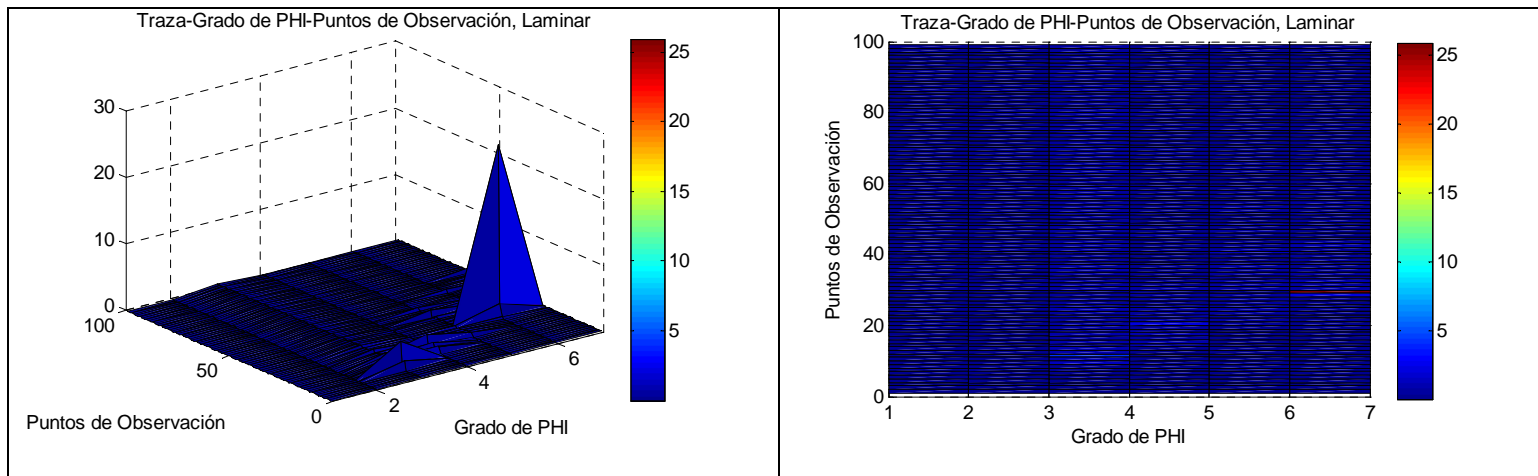


Figura 34: Taza en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar

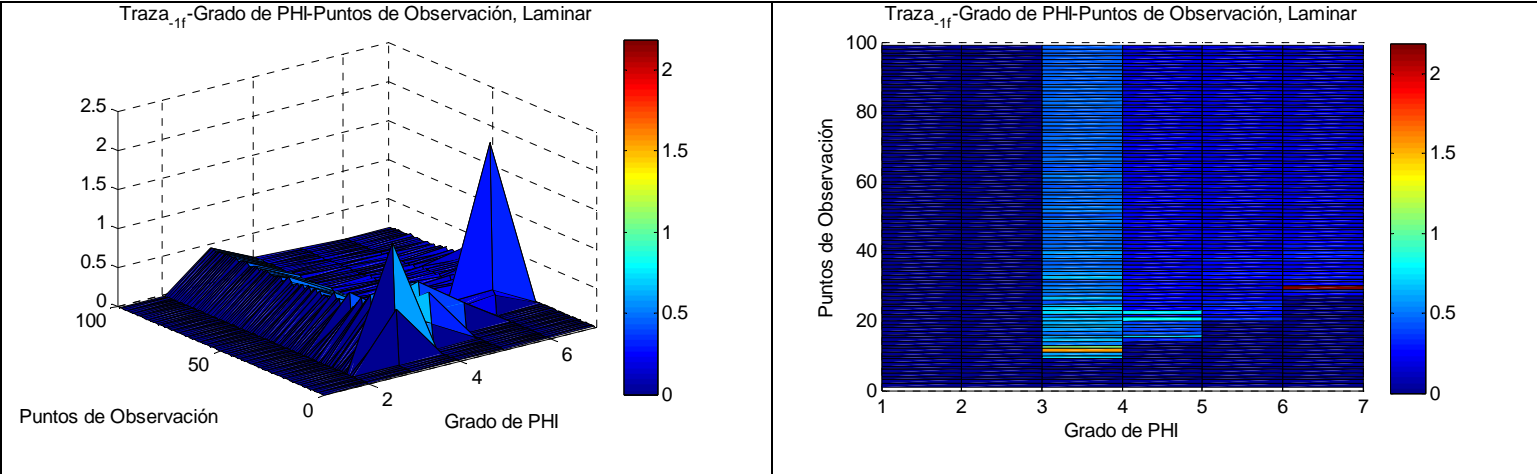


Figura 35: Trazas en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando la última fila (tanto de la parte superior, como inferior, como laterales)

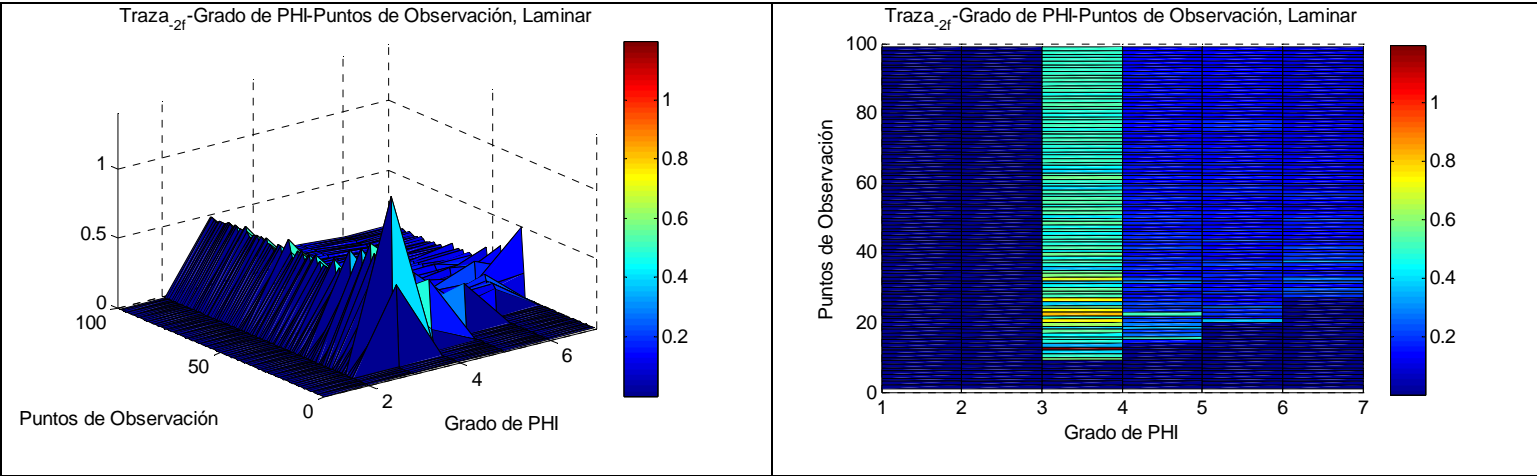


Figura 36: Trazas en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando las últimas dos filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)

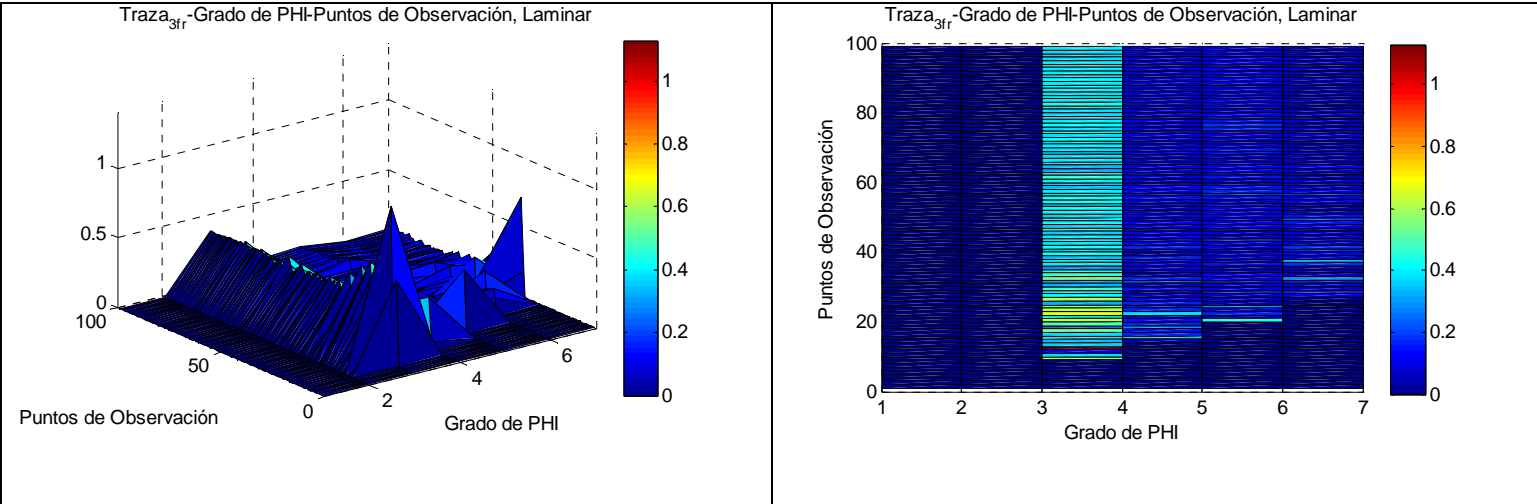


Figura 37: Trazas en función del grado del polinomio de la función de corriente y los puntos de observación campo de vientos más laminar eliminando las últimas tres filas (tanto de la parte superior como inferior como laterales)

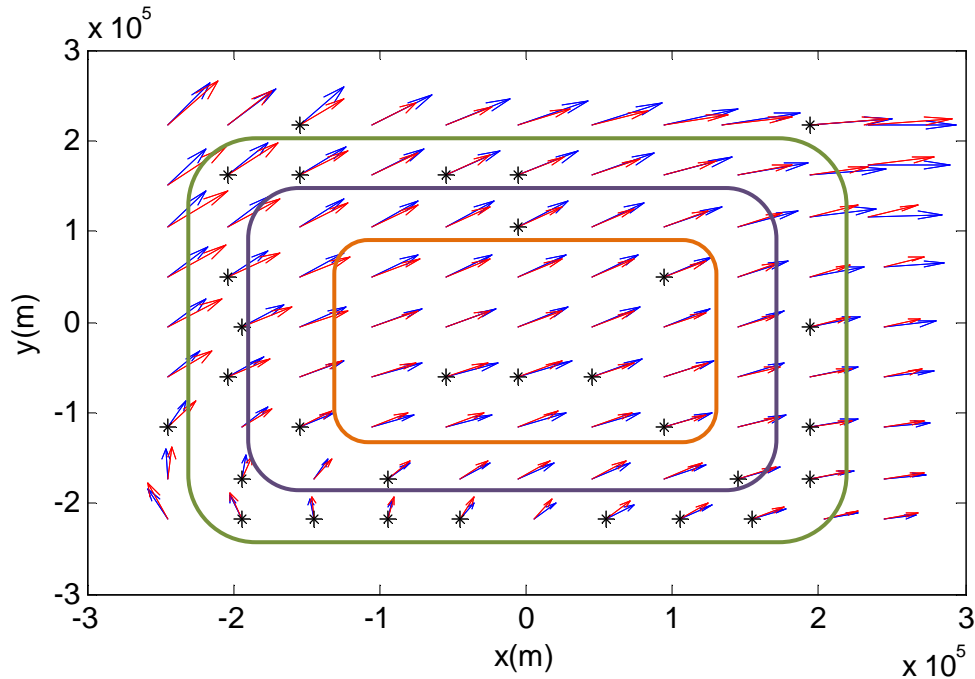


Figura 38: Ejemplo modelo campo de vientos laminar para PHI grado 5 con 30 puntos de observación. Rojo (Viento estimado), Azul (Viento medido). Zona Verde (Eliminando 1 fila), zona morada (Eliminando 2 filas), zona naranja (Eliminando 3 filas)

Otro valor a tener en cuenta es la DOP, que indicará, como en el caso de los estimadores anteriores, como de buena es la estimación calculada, para lo cual debe tener un valor comprendido entre 1 y 2.

Una magnitud real \underline{z} , será igual a una función de una serie de determinados coeficientes (Ec. 60), donde tanto la magnitud como los coeficientes de la función son términos reales y por lo tanto desconocidos.

$$\underline{z} = f(\underline{a}(\vec{x})) \quad (\text{Ec. 60})$$

La ecuación (Ec. 61) dice que la magnitud real será igual a la magnitud medida más un determinado error de la medición, resultando este último desconocido aunque a su vez poco relevante para los propósitos del presente proyecto, aunque conocido el instrumento de medida puede conocerse la distribución de las medidas realizadas con dicho instrumento.

$$\underline{z} = \hat{\underline{z}} + \underline{\eta} \quad (\text{Ec. 61})$$

Debido al desconocimiento de la magnitud real \underline{z} , se procede la estimación de la misma resultando la expresión que se muestra en la ecuación (Ec. 62). Donde se ha sustituido la magnitud real \underline{z} por la magnitud medida más el error de dicha medida (Ec. 61).

$$\hat{\underline{z}} = f(\underline{a}(\vec{x})) - \underline{\eta} \quad (\text{Ec. 62})$$

Así mismo de la ecuación anterior son desconocidos los coeficientes reales de la función $f(\underline{a}(\vec{x}))$ como se ha mencionado ya anteriormente, procediendo por lo tanto a su estimación se llega a la expresión que aparece en la ecuación (Ec. 63).

$$\hat{\underline{z}} = f(\hat{\underline{a}}(\vec{x})) \quad (\text{Ec. 63})$$

En el presente trabajo se desea obtener la aproximación de las componentes de la velocidad, para lo cual ha sido aproximada por una suma de monomios que son multiplicados por unos coeficientes a determinar, por lo tanto lo que será importante determinar es el error cometido entre los coeficientes estimados $\hat{\underline{a}}(\vec{x}_l)$ y los reales $\underline{a}(\vec{x}_l)$ (desconocidos). En la ecuación (Ec. 63) se ha hecho uso de la ecuación (Ec. 13) así como de la ecuación (Ec. 61).

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon}_{m \times 1}(\vec{x}_l) &= \hat{\underline{a}}(\vec{x}_l) - \underline{a}(\vec{x}_l) = \underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \hat{\underline{u}} - \underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \underbrace{(\hat{\underline{u}} + \underline{\eta})}_{\underline{u}} = \\ &= \underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \underline{\eta} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 64})$$

Por lo tanto la matriz de covarianza de los errores de la estimación con respecto a las medidas puede calcularse como la esperanza matemática del producto del vector de errores por su traspuesta como se representa en la ecuación (Ec. 65). Donde se ha sustituido el valor de la matriz de errores por el producto de matrices de la ecuación (Ec. 64), posteriormente se define la covarianza de los errores de medición como $\sigma^2 \underline{\underline{I}} = E[\underline{\eta} \cdot \underline{\eta}^T]$ resultando como puede observarse, que la matriz de covarianza de los errores de estimación con respecto a las medidas función de la matriz de covarianza y de la matriz $\underline{\underline{G}}$.

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_{m \times m}^2(\vec{x}_l) &= E[\underline{\varepsilon}_{m \times 1} \cdot \underline{\varepsilon}_{m \times 1}^T] = E\left[\left(\underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \underline{\eta}\right) \cdot \left(\underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \underline{\eta}\right)^T\right] = \\ &= \underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l) \cdot \underbrace{E[\underline{\eta} \cdot \underline{\eta}^T]}_{\sigma^2 \underline{\underline{I}}} \cdot \left(\underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l)\right)^T = \\ &= \underbrace{\left(\underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l)\right) \left(\underline{\underline{A}}(\vec{x}_l)^{-1} \underline{\underline{B}}(\vec{x}_l)\right)^T}_{\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{G}}^T} \cdot \sigma^2 \end{aligned} \quad (\text{Ec. 65})$$

Finalmente con ayuda de las matrices de la ecuación (Ec. 65) puede definirse la DOP como la raíz cuadrada de la traza de la matriz $\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{G}}^T$, como se muestra en la ecuación (Ec. 66).

$$DOP^2(\vec{x}_l) = \text{traza}(\underline{\underline{G}} \cdot \underline{\underline{G}}^T) \quad (\text{Ec. 66})$$

A continuación se procederá a realizar un estudio para ver cómo afectan las variables del problema (Grado de Φ , puntos de observación, puntos frontera) para lo cual se tendrá el valor de la DOP para cada punto del espacio, para cada grado de Φ y para cada número de puntos de observación.

En primer lugar se ha analizado el caso del modelo de vientos más turbulento. Se parte inicialmente del analizado el valor de la DOP en los puntos del espacio aéreo estudiado, donde como se puede observar en la Figura 39 y en la Figura 40, para los puntos frontera el DOP mayor que en los puntos interiores, debido a que como se ha mencionado en el análisis de la traza, los puntos frontera es donde mayores errores se cometen tas no disponer de información de de los puntos de su entorno.

DOP para Grado de PHI 3 con 35 Ptos de Observación, Turbulento

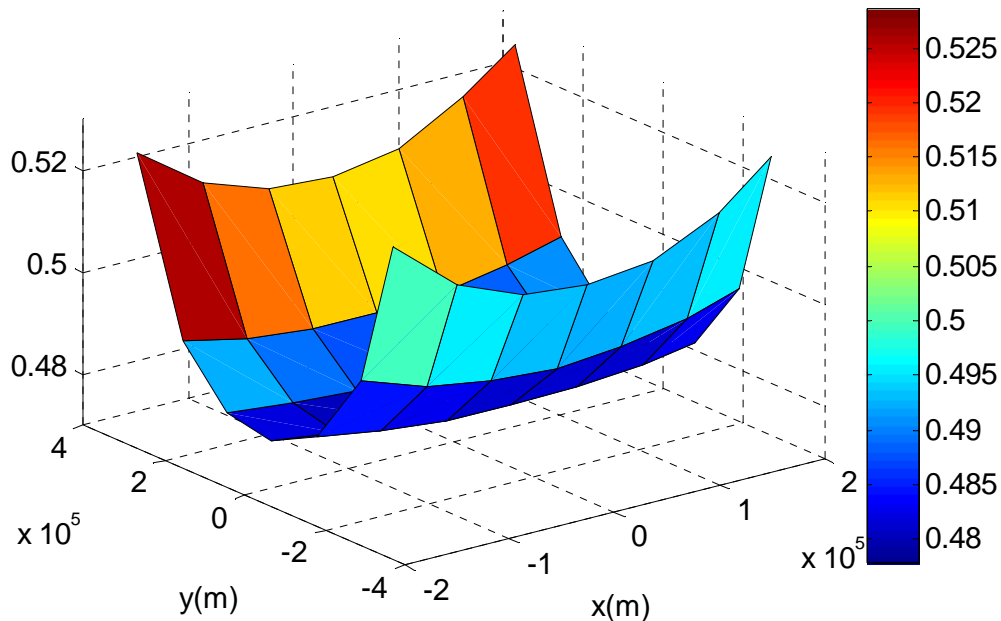


Figura 39: DOP empleando una PHI de grado 3 con 35 puntos de observación

DOP para Grado de PHI 5 con 35 Ptos de Observación, Turbulento

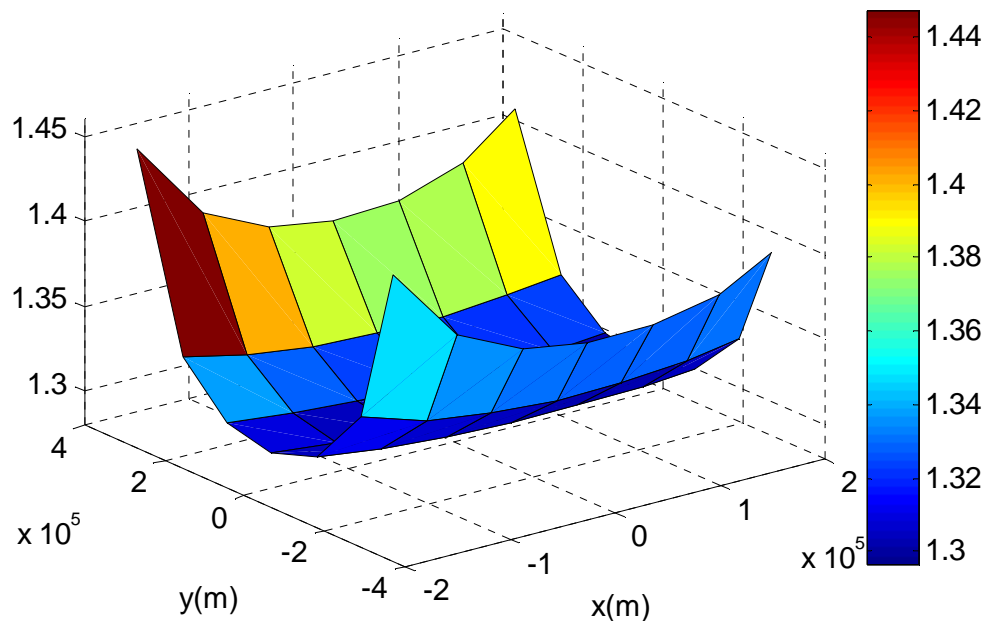


Figura 40: DOP empleando una PHI de grado 5 con 35 puntos de observación

A continuación (véanse Figura 41, Figura 42, Figura 43, Figura 44, Figura 45) se puede observar que para un mismo grado de Φ al aumentar el número de puntos de observación disminuye el valor de la DOP, debido a que al aumentar el número de puntos aumenta la redundancia de los datos y por lo tanto mejora la estimación realizada.

Otro aspecto destacable es que a medida que aumenta el grado de Φ para los mismos puntos de observación aumenta los valores del DOP medio, hecho que puede observarse también en la Figura 46, ya que esta figura representa el valor del mismo en función de las dos variables analizadas (Grado de Φ y número de puntos de observación).

Así mismo se observa que no disponen de asíntota horizontal, es decir, no disponen de un valor al que tienda la DOP media al aumentar el número de puntos de observación y por lo tanto decrece el valor del mismo siempre que se aumenta el número de puntos de observación. Llevado al límite, en el que se tenga infinitos puntos y por lo tanto información de todo el volumen de control el DOP tenderá a 0, ya que el error que se producirá en la estimación debe ser 0.

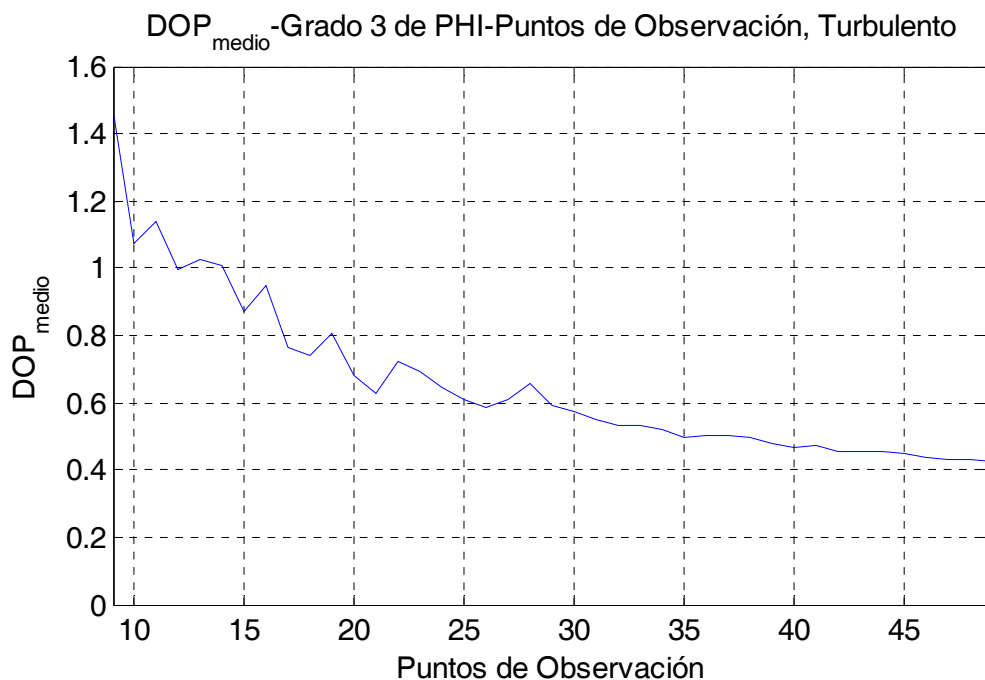


Figura 41: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento

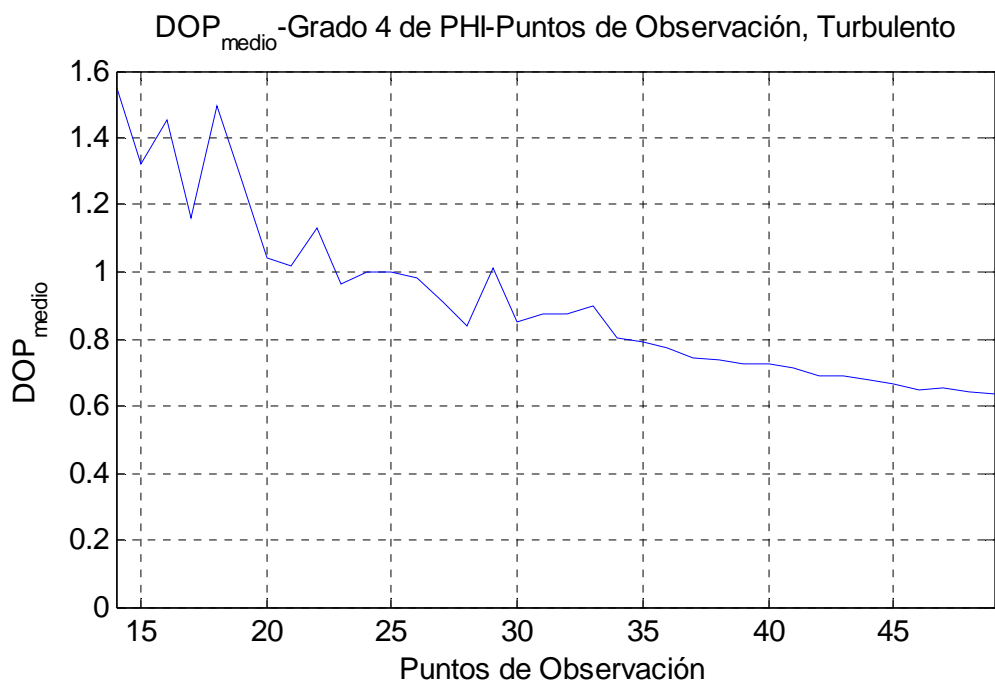


Figura 42: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento

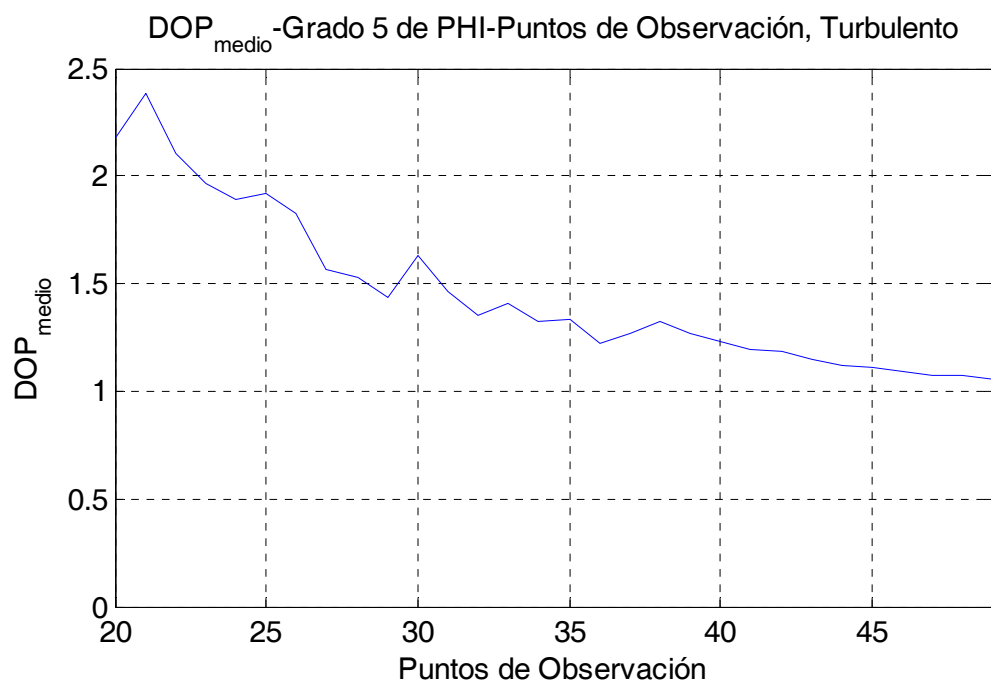


Figura 43: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento

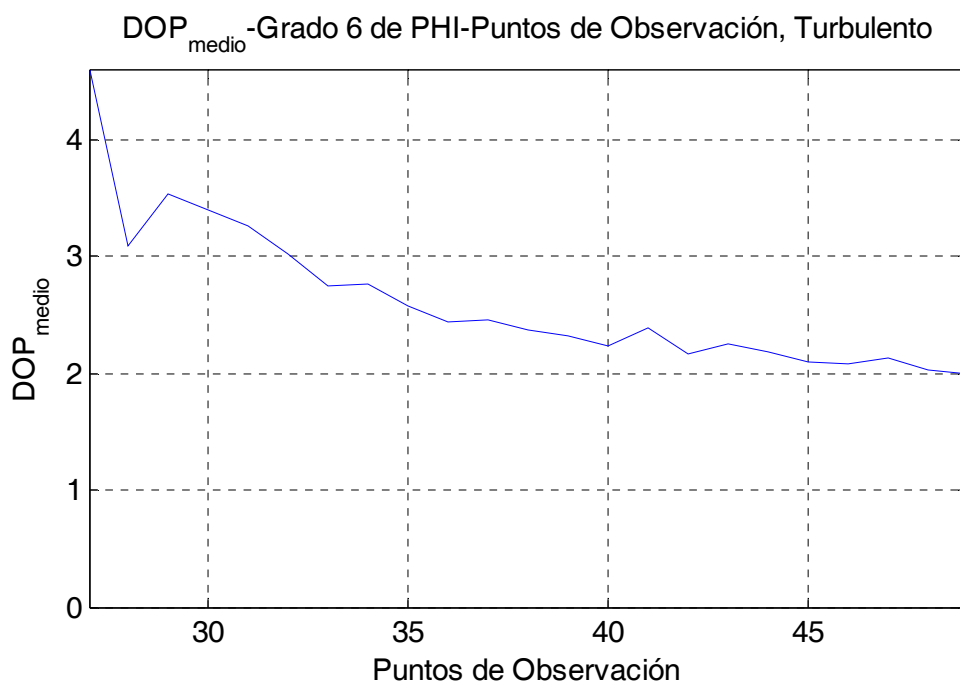


Figura 44: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento

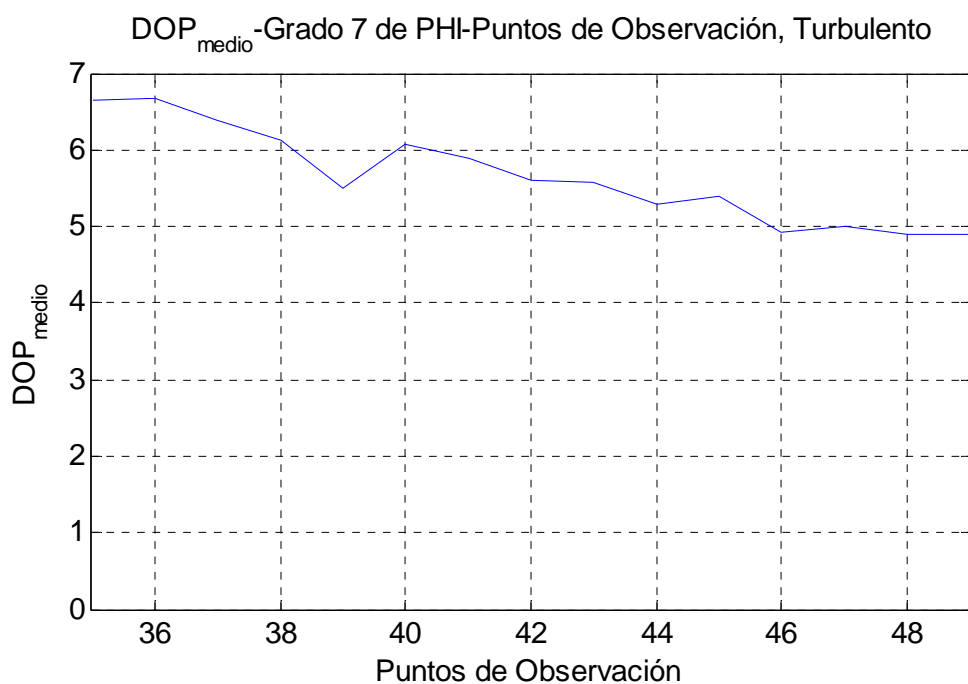


Figura 45: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento

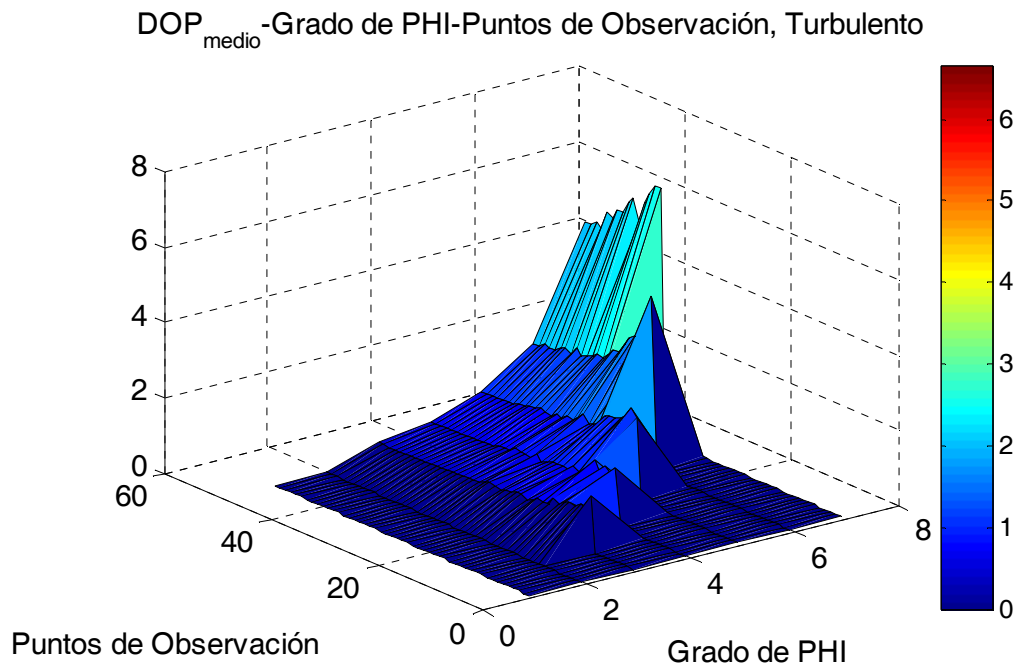


Figura 46: DOP medio en función del grado de PHI y de los puntos de observación para un campo de vientos más turbulento

Para finalizar con el análisis de la DOP se va a estudiar su comportamiento al estimar un campo de vientos más laminar.

De manera análoga a lo realizado en el caso del campo de vientos más turbulento, en la Figura 47 y en la Figura 48 se tienen el valor de la DOP medio de los puntos del espacio aéreo analizado empleando un grado 3 de la función potencial y 35 puntos de observación y para un grado 5 con 35 puntos, respectivamente. Llegando a la misma conclusión que para el caso más turbulento, en los puntos interiores se obtiene un mejor valor de la DOP medio, y por lo tanto se tendrá una mejor aproximación del campo de velocidades del viento en dichos puntos.

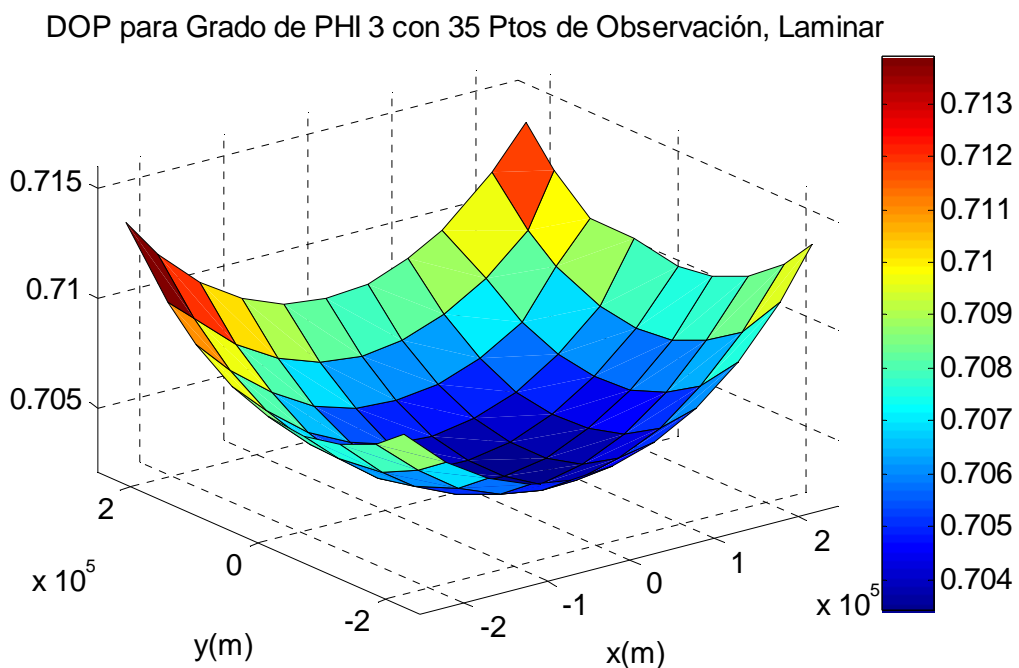


Figura 47: DOP empleando una PHI de grado 3 con 35 puntos de observación campo de vientos más laminar

DOP para Grado de PHI 5 con 35 Ptos de Observación, Laminar

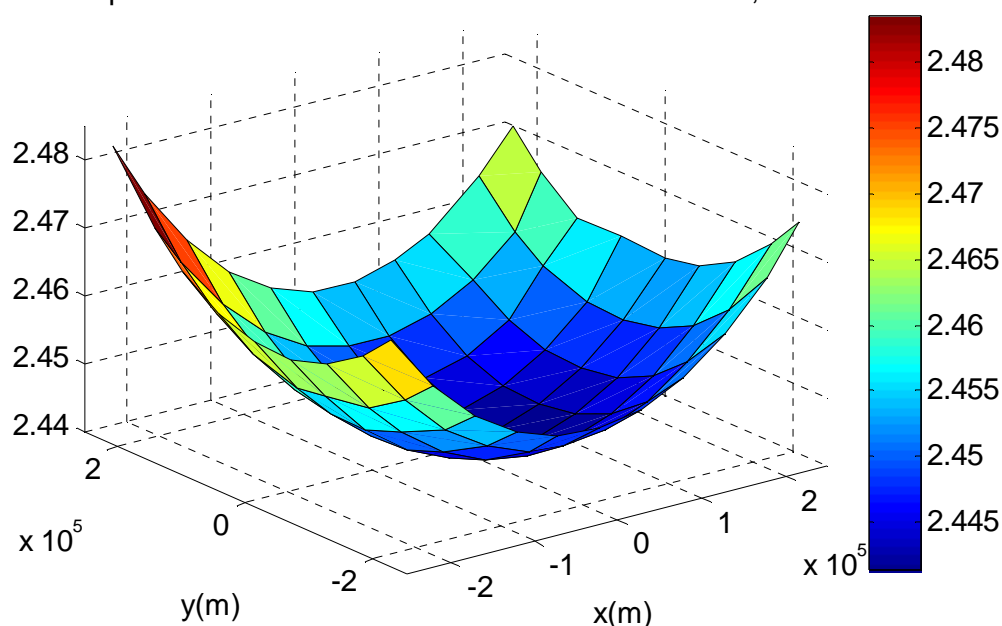


Figura 48: DOP empleando una PHI de grado 5 con 35 puntos de observación campo de vientos más laminar

En la Figura 49, la Figura 50, la Figura 51, la Figura 52 y la Figura 53 se puede observar como ya ocurría en el caso del campo de vientos más turbulento, para un mismo grado de Φ al aumentar el número de puntos de observación disminuye el valor de la DOP, debido a que al aumentar el número de puntos aumenta la redundancia de los datos y por lo tanto mejora la estimación realizada. Comparando los distintos modelos se observa que para el modelo de vientos más turbulento los el ratio entre el valor máximo y es valor mínimo es menor que en el modelo de vientos más laminar.

Además como también sucedía en el modelo de campo de viento anterior a medida que aumenta el grado de Φ para los mismos puntos de observación aumenta los valores del DOP medio, hecho que puede observarse también en la Figura 54, ya que esta figura representa el valor del mismo en función de las dos variables analizadas (Grado de Φ y número de puntos de observación).

En este caso tampoco se dispone de un claro valor de DOP medio al que tienda según se aumenta el número de puntos de observación para cada grado de Φ , aunque la tendencia es más pronunciada que para el caso del modelo más turbulento, debido a que en este modelo el número máximo de puntos de observación es el doble que el que se ha utilizado para el modelo de viento turbulento. Por lo que se corrobora la conclusión obtenida anteriormente para el caso del modelo turbulento, que la DOP tenderá a 0 cuando el número de puntos de observación tienda a infinito.

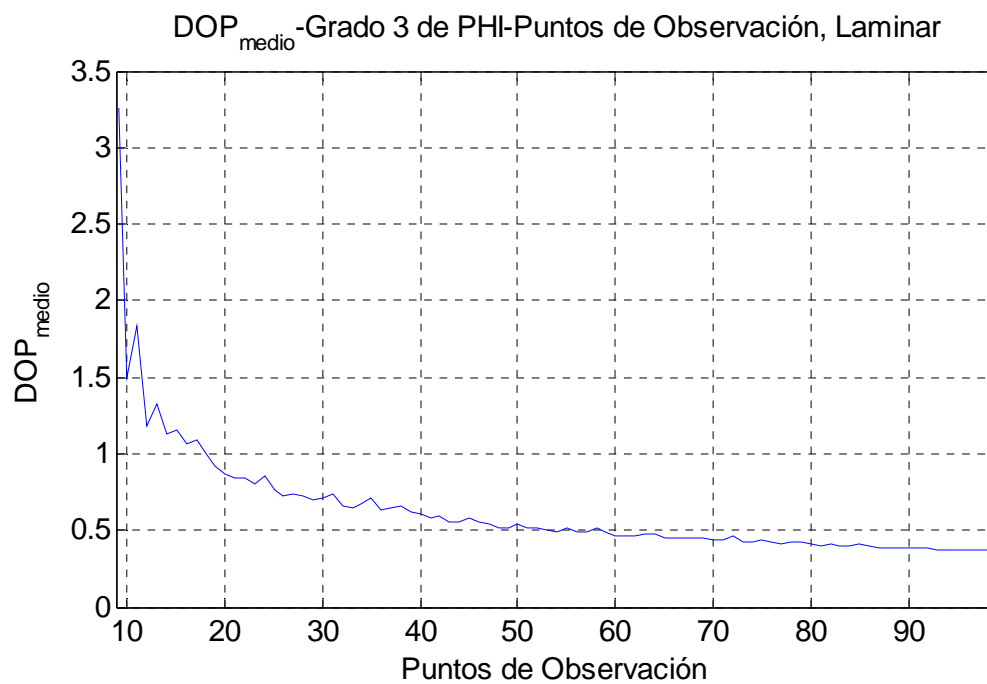


Figura 49: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar

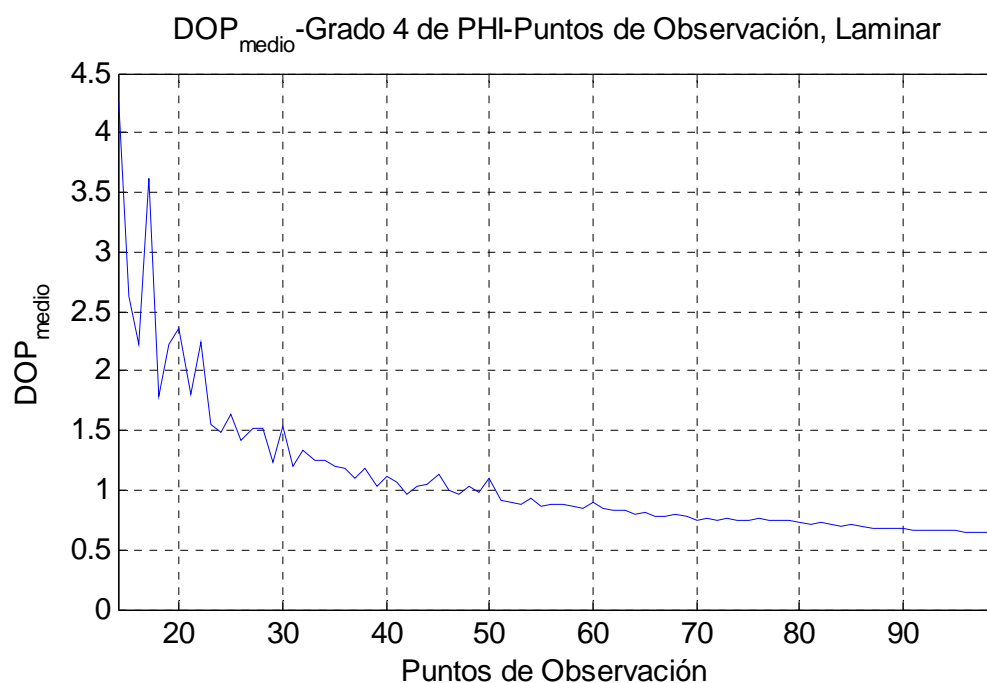


Figura 50: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar

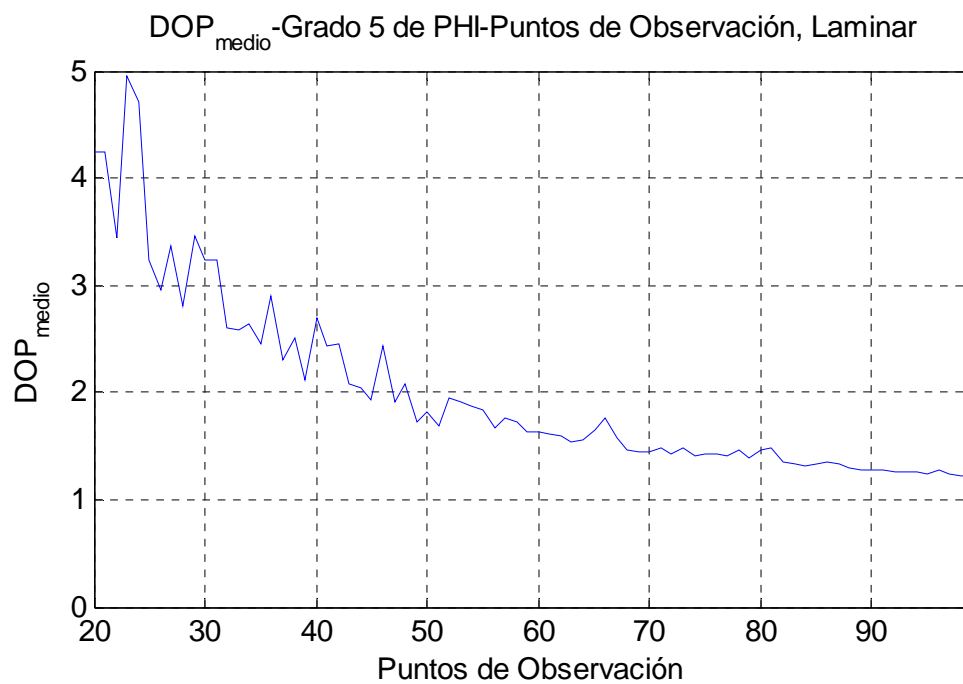


Figura 51: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar

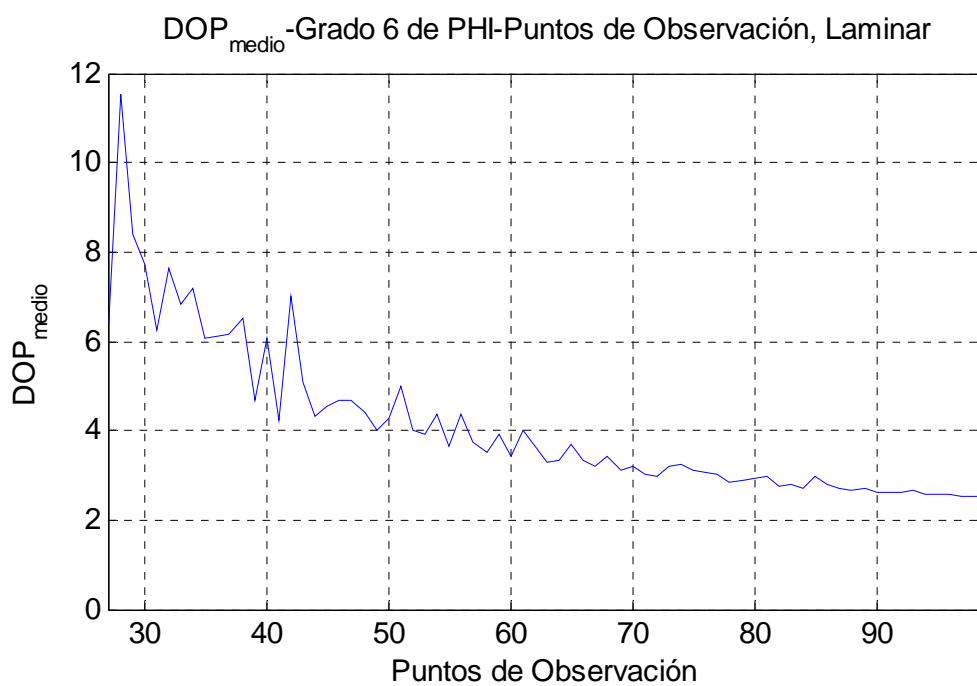


Figura 52: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar

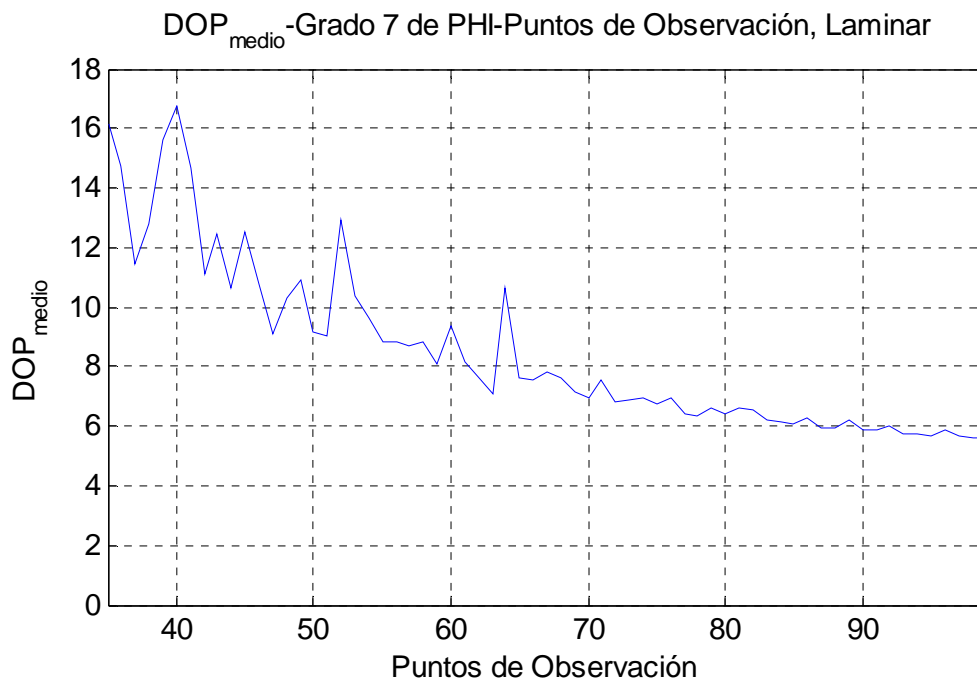


Figura 53: Valor del DOP medio en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento

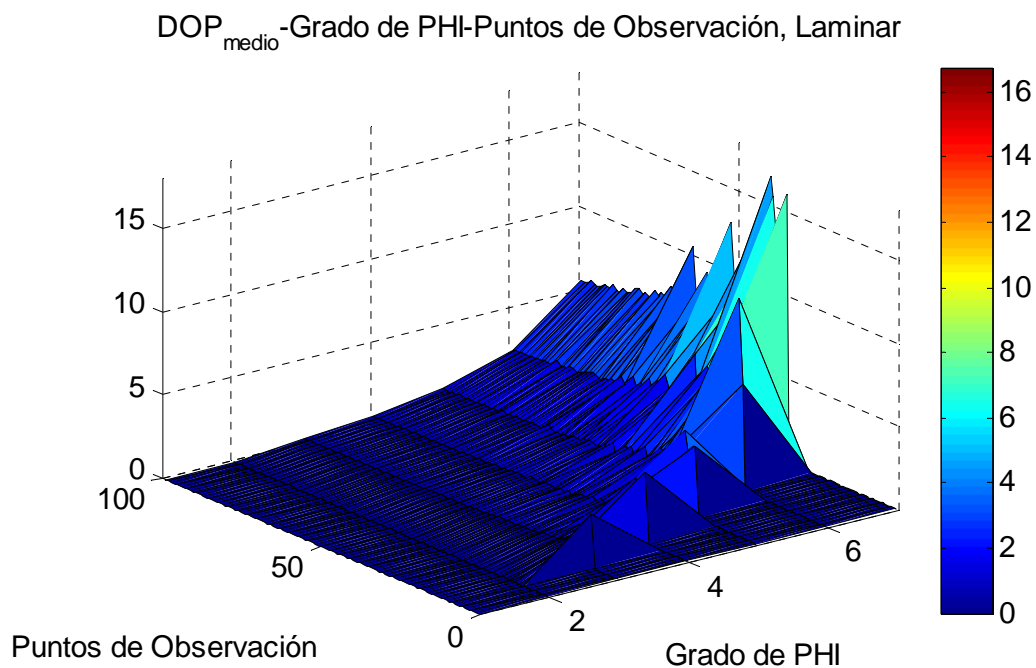


Figura 54: DOP medio en función del grado de PHI y de los puntos de observación para un campo de vientos más laminar

Para concluir con el estudio del modelo de estimación del campo de vientos mediante la introducción de la velocidad se ha de analizar la dependencia de los resultados en la selección de los puntos de observación. Para lo cual se han representado tanto para el modelo más turbulento como para el modelo más laminar los resultados de la traza de la matriz de la (Ec. 56) obtenido mediante diez ensayos en el que se han seleccionado puntos de observación con distinta

ubicación. (Para conseguir seleccionar los puntos aleatoriamente se ha hecho uso de la función *rand* de matlab, véase Anexo 3).

En primer lugar se representa los resultados correspondientes al modelo de vientos más turbulento, donde se analizará el número de puntos de observación mínimo necesario para el que los valores de la traza de los distintas simulaciones para cada grado de monomios máximos de la función de corriente converge a un único valor, denominado valor estacionario.

En la Figura 55 se representa el resultado de las diez simulaciones cuando el grado máximo de los monomios de la función de corriente es tres. Se observa que el valor estacionario de $23,3 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 23,3_{20,97}^{25,63} m^2/s^2$ se alcanza para 43 puntos de observación.

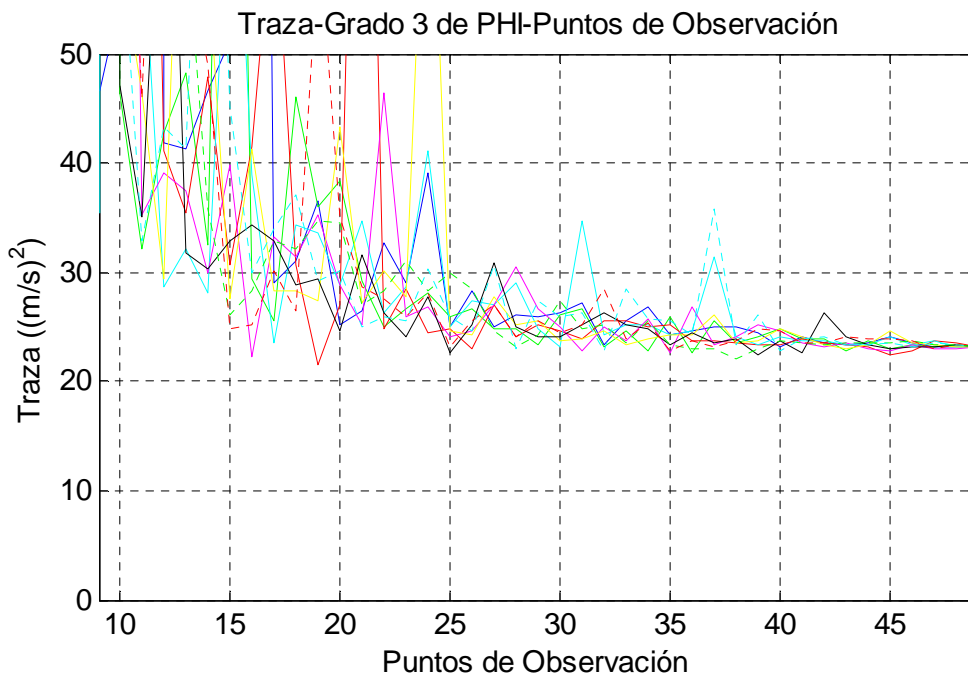


Figura 55: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más turbulento

Para un grado 4 de la función de corriente se observa que no solo existe gran variación de los valores de la traza para los primeros valores de los puntos de observación sino también para los puntos intermedios, por lo tanto a medida que aumenta el grado de la función de corriente la dependencia de la localización de los puntos en los resultados de la simulación es más acusada. En la Figura 56 se aprecia que el valor estacionario: $13 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 13_{11,7}^{14,3} m^2/s^2$, se alcanza aproximadamente con 42 puntos de observación.

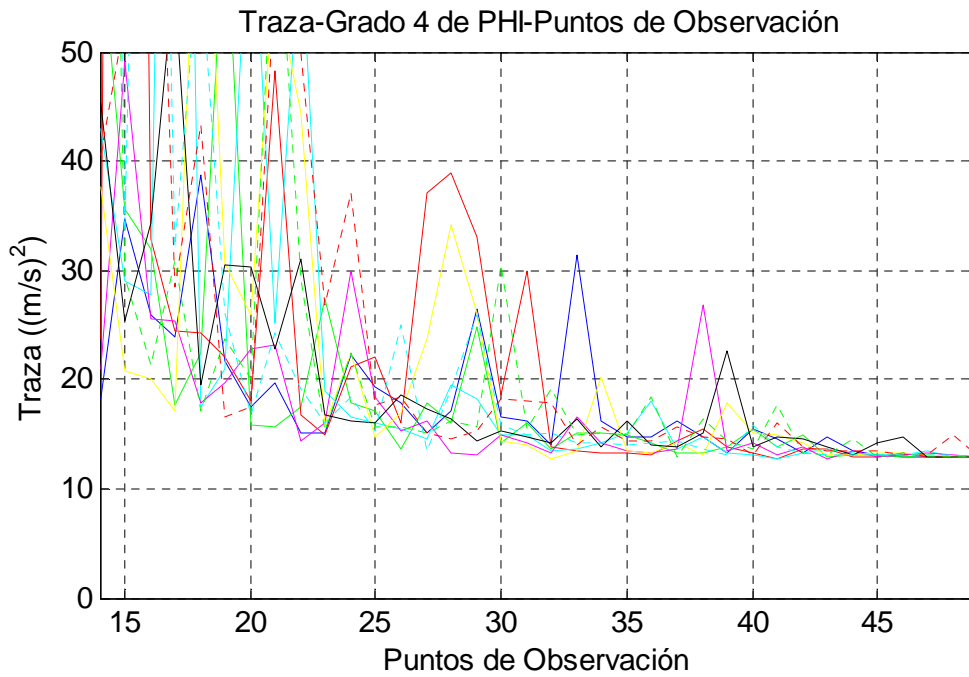


Figura 56: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más turbulento

En lo que respecta al grado 5 el valor estacionario se alcanza a partir de 45 puntos, siendo dicho valor estacionario de $9,3 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 9,3_{8,37}^{10,23} m^2/s^2$, como puede apreciarse de la Figura 57.

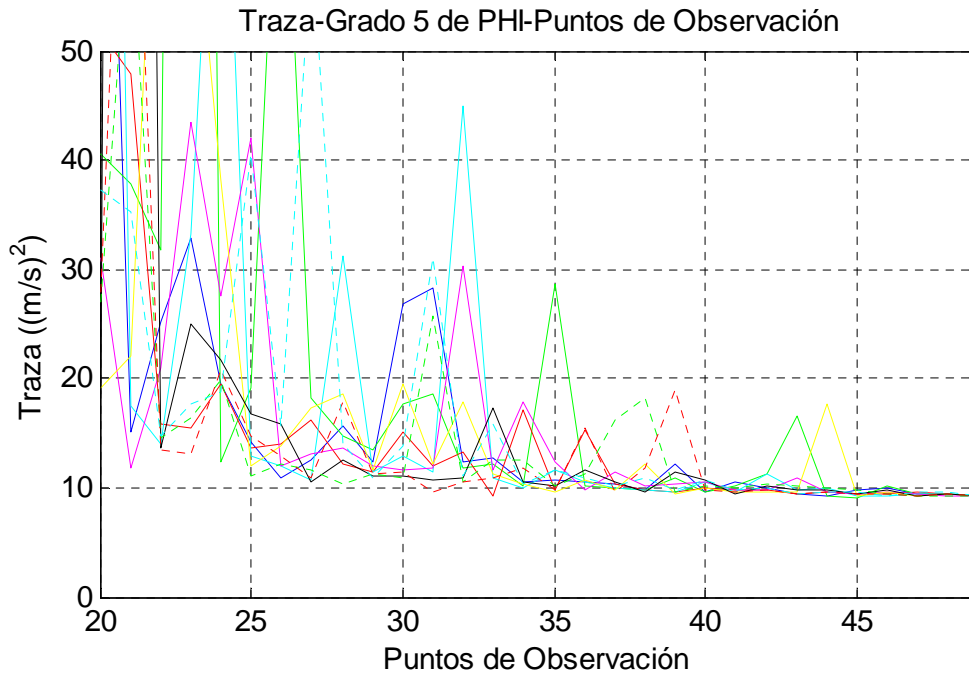


Figura 57: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más turbulento

Seguidamente en la Figura 58 se tiene la representación de las trazas para las distintas simulaciones empleando un grado 6 en el monomio de mayor orden, donde se aprecia que el valor estacionario $6,5 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 6,5_{5,85}^{7,15} m^2/s^2$ se obtiene para 48 puntos o superiores.

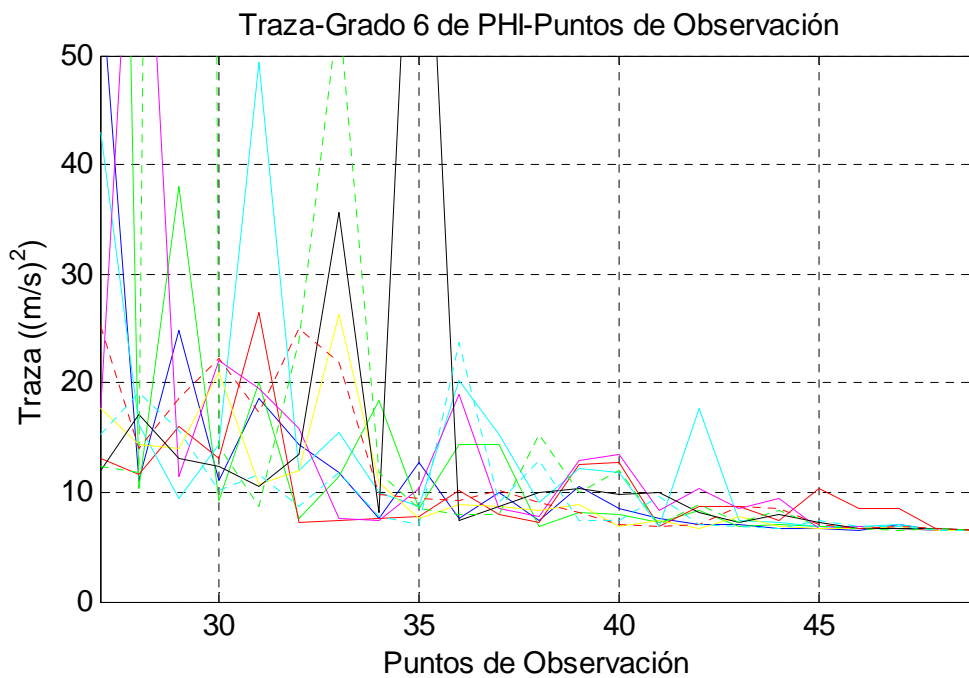


Figura 58: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más turbulento

Para concluir con el modelo laminar se analiza la Figura 59 en el que la traza se estabiliza para un valor de $5,6 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 5,6_{5,04}^{6,16} m^2/s^2$ y por lo tanto se precisará de al menos 48 puntos de observación.

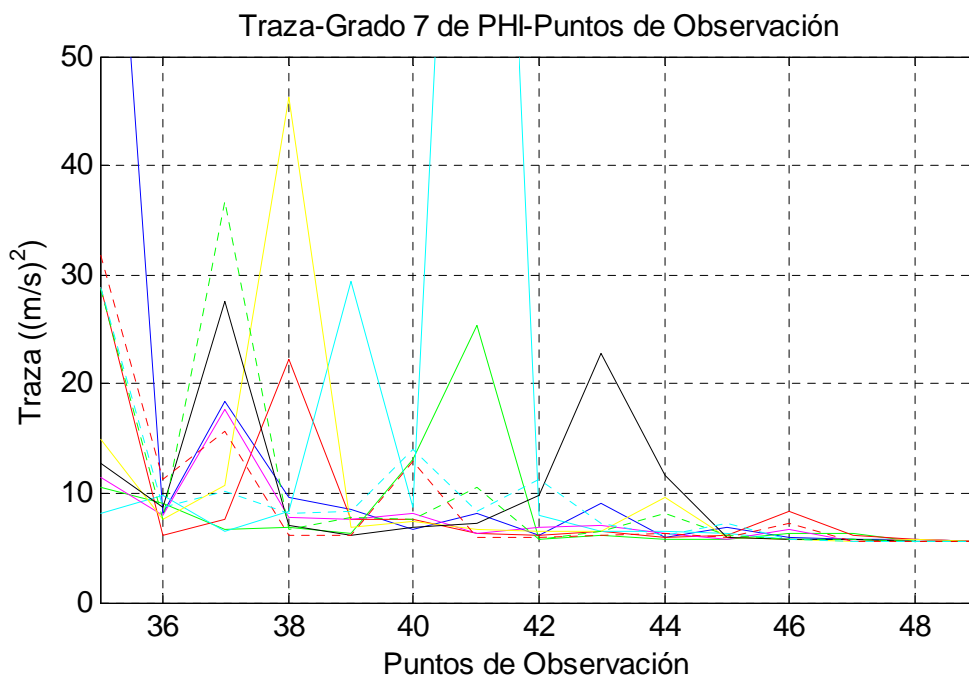


Figura 59: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más turbulento

Tabla 7: Resultados análisis dependencia ubicación puntos de observación modelo de vientos más turbulentos

GRADO Φ	COEFICIENTES A DETERMINAR	PUNTOS DE OBSERVACIÓN	VALOR ESTACIONARIO TRAZA (m^2/s^2)	$\sqrt{\text{Traza}_{\text{Estaci.}}}$ $\sqrt{ \vec{v} _{medTUR}}$ 6,8404m/s
3	9	43 ó superior	23,3	0,7057
4	14	42 ó superior	13	0,5271
5	20	45 ó superior	9,3	0,4458
6	27	48 ó superior	6,5	0,3727
7	35	48 ó superior	5,6	0,3459

Para concluir con el estudio de la calidad de la estimación debido a la distinta localización de los puntos de observación se va a proceder al análisis de la traza para cada grado de la función de corriente del campo de vientos más laminar en función de los puntos de observación, con el fin de seleccionar para cada grado de la función de corriente el número de puntos necesarios para que la calidad de la estimación no dependa de la ubicación de los puntos.

En primer lugar, en la Figura 60 se representa las distintas simulaciones para un grado máximo de los monomios de la función de corriente de tres, en el que el valor estacionario será de: $0,6m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 0,6^{0,66}_{0,54} m^2/s^2$, obteniéndose para al menos 73 puntos de observación.

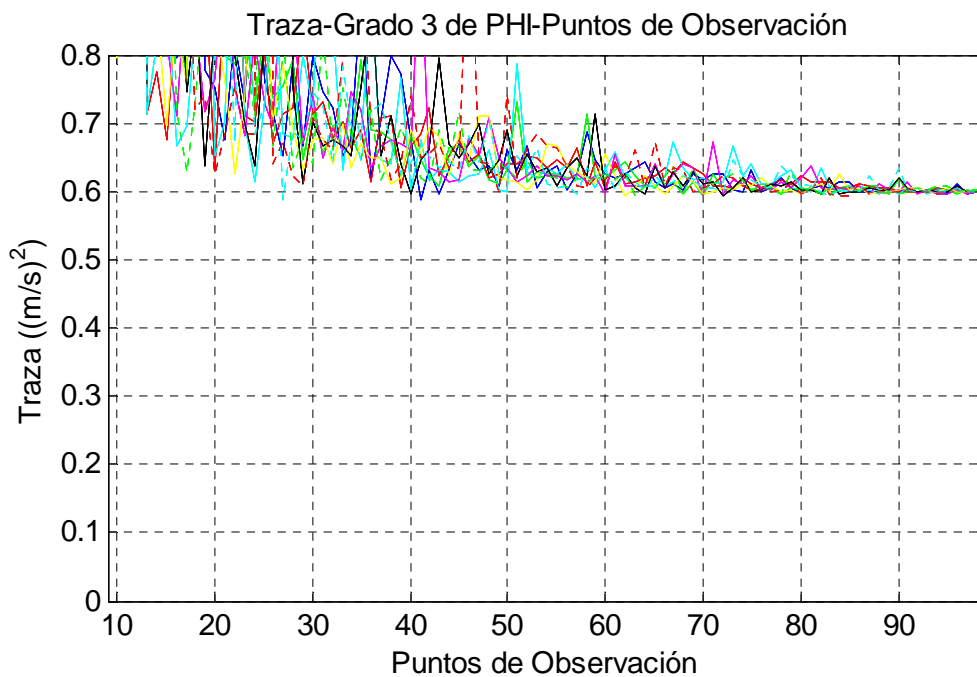


Figura 60: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 3 campo de vientos más laminar

A continuación en la Figura 61 se tiene los resultados de la traza para grado 4, donde el valor estacionario de la traza disminuye hasta: $0,31m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 0,31^{0,341}_{0,279} m^2/s^2$, obteniéndose a partir de 80 puntos de observación.

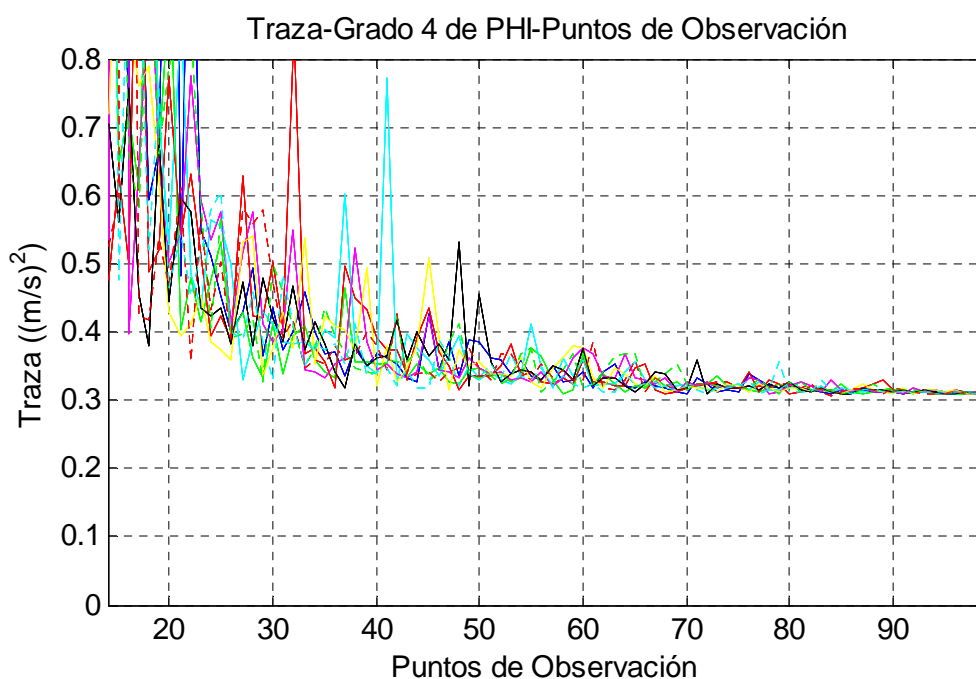


Figura 61: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 4 campo de vientos más laminar

Para grado 5, como indica la Figura 62 se tendrá un valor estacionario cuando se disponga de al menos 83 puntos de observación, siendo el valor estacionario de la traza de $0,288 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 0,288_{0,2592}^{0,3168} m^2/s^2$.

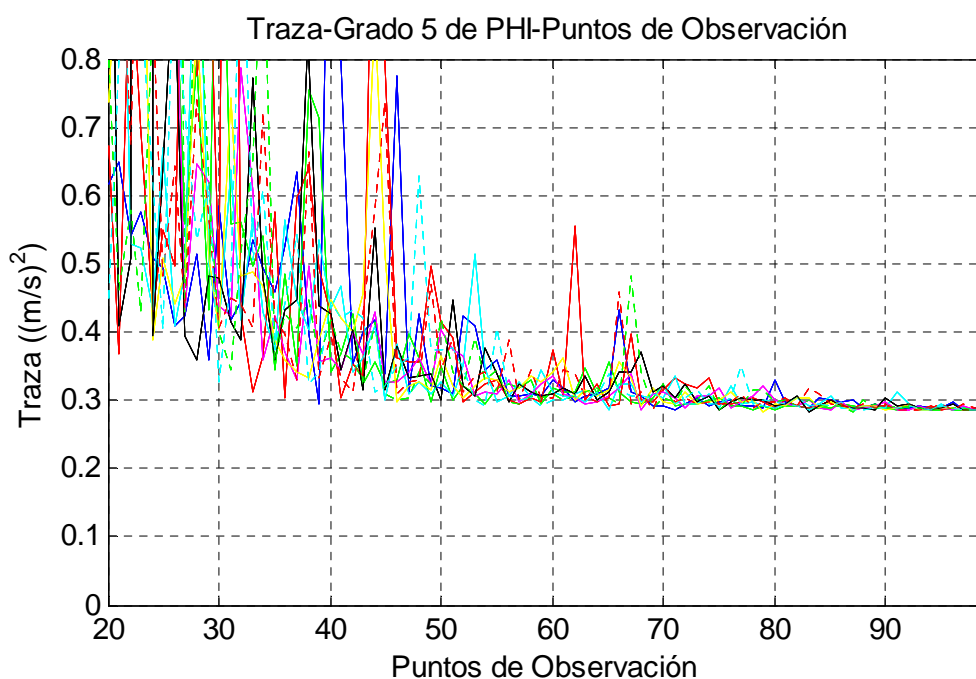


Figura 62: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 5 campo de vientos más laminar

Posteriormente en la Figura 63, donde se observa las distintas simulaciones para un grado 6 en el que la traza dispone de un valor estacionario de $0,264 m^2/s^2 \pm 10\%VN \equiv 0,264_{0,2376}^{0,2904} m^2/s^2$ consiguiéndose a partir de 85 puntos de observación.

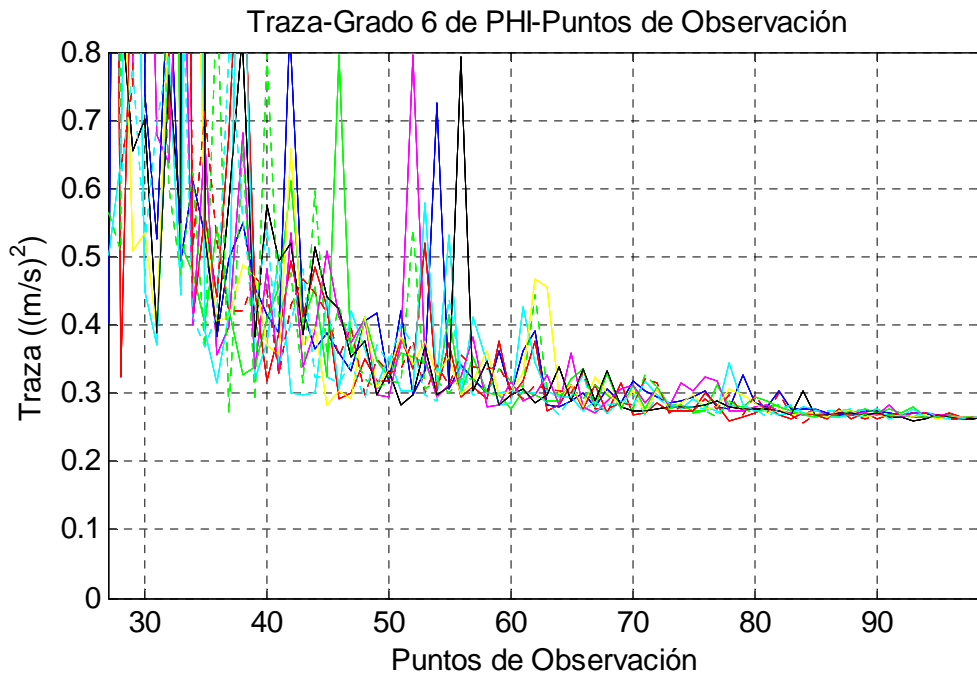


Figura 63: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 6 campo de vientos más laminar

Finalmente para un grado sexto de la función de corriente, se tendrá como se observa en la Figura 64, un valor estacionario de la traza de $0,263 \text{ m}^2/\text{s}^2 \pm 10\% \text{ VN} \equiv 0,263_{0,2367}^{0,2893} \text{ m}^2/\text{s}^2$ empleando al menos 90 puntos de observación.

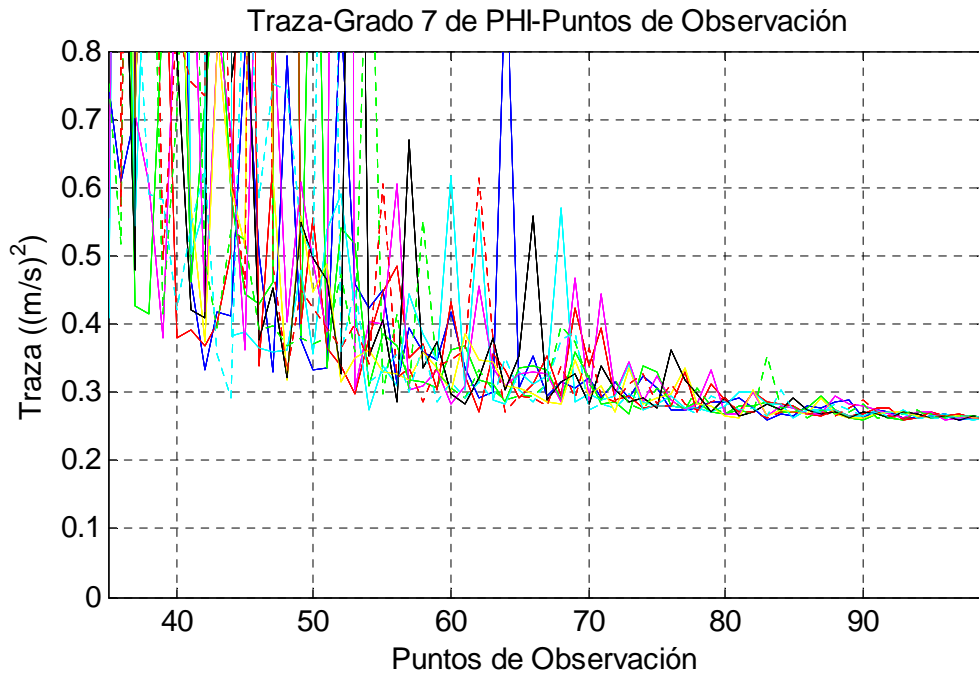


Figura 64: Valores de la traza en función del número de puntos de observación para PHI grado 7 campo de vientos más laminar

Tabla 8: Resultados análisis dependencia ubicación puntos de observación modelo de vientos más laminar

GRADO Φ	COEFICIENTES A DETERMINAR	PUNTOS DE OBSERVACIÓN	VALOR ESTACIONARIO TRAZA (m^2/s^2)	$\sqrt{\text{Traza}_{\text{Estaci.}}}$ $\sqrt{ \vec{v} _{\text{medLAM}}}$ 3,3460m/s
3	9	73 ó superior	0,6	0,2315
4	14	80 ó superior	0,31	0,1664
5	20	83 ó superior	0,288	0,1604
6	27	85 ó superior	0,264	0,1536
7	35	90 ó superior	0,263	0,1533

3.2.1.1. Conclusión

El propósito de este apartado es seleccionar el valor de las variables, o el rango de las mismas que proporcionen unos valores aceptables de los errores de estimación. Por lo tanto se ha analizado como varían la traza de la matriz de covarianza de los errores de estimación y el DOP, con el grado de la función de corriente y con el número de puntos de observación empleados, así como con la ubicación de los puntos de observación seleccionados y para el tipo de modelo de viento analizado (más laminar o más turbulento).

Seleccionando los resultados más limitantes, se puede concluir que los mejores resultados de las velocidades del viento estimadas se producen seleccionando las variables que vienen representadas en la Tabla 7 y la Tabla 8 para el modelo más turbulento y más laminar respectivamente.

Así como también se puede concluir que los puntos frontera proporcionarán peores resultados, por lo tanto sus estimaciones no deben ser tenidas en cuenta, tan solo deben emplearse para dar información a los puntos interiores.

3.2.2. Imponiendo presión en los nodos.

En el presente apartado se estimarán las componentes de la velocidad del viento, empleando como valores medidos la presión en dichos puntos de observación.

Como se explica en el Anexo 1 los mensajes ADS-B proporcionan información de la altitud barométrica relativa a la presión estándar (1013.25 mbar) o altitud GNSS sobre el elipsoide de referencia, la cual puede ser empleada con ayuda de la ecuación de la atmosfera estándar para conocer la presión en ese punto (véase (Ec. 67) y (Ec. 68)), ya que como se vio anteriormente los mensajes ADS-B nos proporcionan a su vez los datos de la posición de la misma.

Los datos empleados fueron tomados para una altura de 10m, debido a que es la forma en la que el programa UGRIB proporciona la información, véase datos empleados para los distintos modelos (más turbulento o más laminar) en el Anexo 2. En un escenario real las aeronaves estarán a distinto nivel de vuelo y por lo tanto se necesitaría establecer todas las presiones a una altura de referencia sobre la que se realizaría el cálculo de la presión estimada y con esta posteriormente se

calcularían las componentes estimadas de la velocidad del viento, dicho proceso de paso de las presiones a una altura de referencia se realizaría con las ecuaciones (Ec. 67) y (Ec. 68)⁸, que son las ecuaciones del cálculo de presión para una atmósfera estándar ISA.

$$p = p_0 \left(1 - \frac{\alpha}{T_0} h \right)^{\frac{g_0}{\alpha R}} \quad 0 \leq h \leq 11000\text{m} \quad (\text{Ec. 67})$$

$$p = p_1 \cdot e^{\frac{-g_0(h-h_1)}{R \cdot T_1}} \quad 11000\text{m} < h \quad (\text{Ec. 68})$$

Donde:

- $R = 287 \text{ J/kg/K}$. Siendo la constante universal de los gases ideales.
- $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$
- $p_0 = 1013.25 \text{ mbar} = 1013.25 \text{ hPa}$. Siendo la presión estándar al nivel medio del mar.
- $T_0 = 288.15 \text{ K}$. Siendo la temperatura estándar a 11000m.
- $\alpha = 0.0065 \text{ }^\circ\text{C/m}$
- $p_1 = 226.32 \text{ mbar} = 226.32 \text{ hPa}$. Siendo la presión estándar a 11000m.
- $T_1 = 216.65 \text{ K}$. Siendo la temperatura estándar a 11000m.

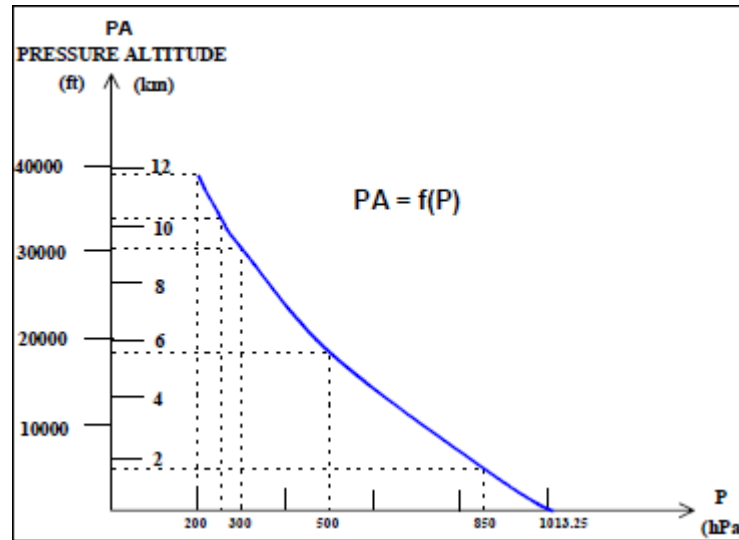


Figura 65: Presión ISA en función de la altura

Como ya se ha explicado con anterioridad, el modelo se basa en las ecuaciones de la mecánica de fluidos, la ecuación de continuidad (Ec. 1) y la ecuación de cantidad de movimiento (Ec. 69) escrita en forma diferencial.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \tau' + \vec{f}_m \quad (\text{Ec. 69})$$

⁸ Ecuaciones de la atmosfera ISA para la presión.

En la ecuación (Ec. 70) se tiene el término de las fuerzas másicas⁹ por unidad de volumen de la ecuación de cantidad de movimiento (Ec. 69) para el sistema de referencia local (véase Figura 65). Donde el primer término corresponde a la gravedad, el segundo término a la aceleración del origen del sistema de referencia, el tercer término a la aceleración centrípeta, el cuarto a la aceleración debida al cambio de velocidad angular del sistema de referencia y el quinto término es la aceleración de Coriolis. Y donde: \vec{v} es la velocidad en el sistema de rotación y $\vec{\Omega}$ es la velocidad angular del sistema en rotación desde un sistema inercial.

$$\rho \cdot \vec{f}_m = \rho \left(\vec{g} - \underbrace{\vec{a}_0}_{=0} - \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{=0} - \underbrace{\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{x}}_{\substack{\vec{\Omega} = \text{Cte} \\ = 0}} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \right) \quad (\text{Ec. 70})$$

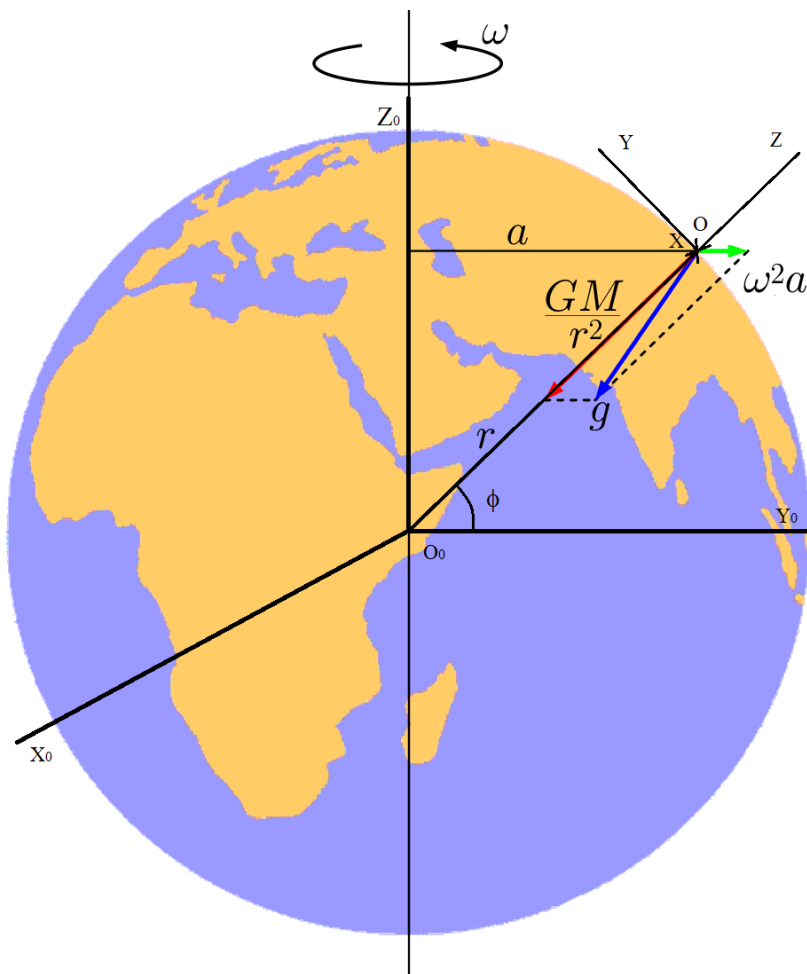


Figura 66: Contribución de la aceleración centrífuga en la gravedad

En la Figura 66 se puede observar los distintos sistemas de referencias empleados, el sistema de referencia inercial (O_0, X_0, Y_0, Z_0) y el sistema de referencia no inercial, denominado sistema

⁹ Las fuerzas másicas son fuerza proporcionales a la masa, las más usuales existentes en la mecánica de fluidos son: la fuerza gravitatoria y las fuerzas de inercia debidas al movimiento del sistema de referencia. [10]

local (O, X, Y, Z) . El sistema local tal y como se explica en la referencia [22] en las páginas 2 y 3, el eje z del sistema de referencia local sigue la dirección del vector gravedad y sentido contrario, el eje y es tangente a la superficie equipotencial y dirección hacia el norte, y el eje x de forma que forme un triedro a derechas (tangente a la superficie y dirección este).

A continuación se explicarán los términos relevantes de la ecuación (Ec. 70), comenzando en primer lugar por la aceleración de la gravedad.

La gravedad varía con la altura de la forma que determina la ecuación (Ec. 71), donde para alturas máximas donde se encontrarán los aviones ($42000ft \equiv 12801.6m \equiv 420FL$) su variación es prácticamente nula. Así mismo existe una ley que nos determina la variación con la latitud (Ec. 72), considerándose también despreciable. Por lo tanto se consierará como valor de la gravedad constante para todos los casos de: $g_0 = 9.80665 m/s^2$.

$$g(h) = g_0 \left(\frac{R_{medT}}{R_{medT} + h} \right)^2 \xrightarrow{\sim g_0 \left(\frac{10^{14}m}{10^{14}+10^4} \right)^2 \sim g_0 0.999999999800000} g(h) \simeq g_0 \quad (Ec. 71)$$

$$g(\phi) = 9.780327 \left(1 + 0.0053024 \cdot \sin^2 \phi - 0.0000058 \cdot \sin^2 2\phi \right) \quad (Ec. 72)$$

La velocidad angular de rotación de la tierra como se puede observar en la Figura 65 sigue la expresión de la ecuación (Ec. 73)(Ec. 72) y cuyo módulo es de:

$$\bullet \quad \Omega = \frac{1rev}{23h56min} \equiv 7.2925 \cdot 10^{-5} rad/s$$

$$\vec{\Omega} = \Omega \cdot \vec{k}_0 = \Omega (\cos \phi \cdot \vec{j} + \sin \phi \cdot \vec{k}) \quad (Ec. 73)$$

Por lo tanto el término de la aceleración de Coriolis de la ecuación (Ec. 70) resultante expresado en ejes locales se puede observar en la ecuación (Ec. 74).

$$2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 2\Omega \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ u & v & w \end{vmatrix} = 2\Omega \left((w \cdot \cos \phi - v \cdot \sin \phi) \cdot \vec{i} + u \cdot \sin \phi \cdot \vec{j} - u \cdot \cos \phi \cdot \vec{k} \right) \quad (Ec. 74)$$

El término viscoso de la ecuación (Ec. 69), $\vec{\nabla} \underline{\underline{\tau'}}$. Donde el tensor de esfuerzos viscosos es el que se define en las ecuaciones (Ec. 75), así como se expresa en la Lección 9 de la referencia [10].

$$\tau'_{11} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\mu_v - \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \xrightarrow{E.Cont: \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0} \tau'_{11} = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (Ec. 75)$$

$$\begin{aligned}
\tau'_{22} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \xrightarrow{E.Cont: \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0} \tau'_{22} = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
\tau'_{33} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\mu_v - \frac{2}{3} \mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \xrightarrow{E.Cont: \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0} \tau'_{33} = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
\tau'_{12} &= \tau'_{21} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
\tau'_{13} &= \tau'_{31} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
\tau'_{23} &= \tau'_{32} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Finalmente se pueden establecer por tanto las ecuaciones pertenecientes al eje x (Ec. 76), al eje y (Ec. 77) y al eje z (Ec. 78).

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) - 2\Omega w \cdot \cos \phi + 2\Omega v \cdot \sin \phi \quad (\text{Ec. 76})$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) - 2\Omega u \cdot \sin \phi \quad (\text{Ec. 77})$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) - g + 2\Omega u \cdot \cos \phi \quad (\text{Ec. 78})$$

Donde la derivada total se define como:

$$\bullet \quad \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) v_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} + v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)$$

En el apartado 1.2 se han explicado las hipótesis de viento geostrófico en el que la (Ec. 3)¹⁰ se aproximaba a la (Ec. 4).

Con el objetivo de demostrar la validez de dichas aproximaciones se procederá a continuación a analizar el orden de magnitud de cada uno de los términos de la ecuación empleando los siguientes valores característicos de las magnitudes [3]:

- $U \sim 10 \text{ m/s}$: Velocidad característica horizontal u orden de magnitud de las variaciones de velocidad horizontal.
- $W \sim 10^{-2} \text{ m/s}$: Velocidad característica vertical u orden de magnitud de las variaciones de velocidad vertical.

¹⁰ Ecuación de cantidad de movimiento de los fluidos, ecuación de Navier-Stokes, Referencia [10].

- $\ell \sim 10^6 m$: Longitud característica que hemos de recorrer en un instante dado para encontrar diferencias de velocidad del orden de U .
- $t_c = L/U \sim 10^5 s$: Tiempo característico.
- $\nu_c \sim 10^{-5} m^2 s^{-1}$: Coeficiente de viscosidad cinemático característico.
- $f_0 \sim 10^{-4} s^{-1}$: Parámetro de Coriolis característico. Por lo que $f_{mc_x} = f_{mc_y} = f_0 U \sim 10^{-3}$

Comenzando con el término de la ecuación de cantidad de movimiento respecto al eje x :

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{St} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}}_{o(1)} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\Delta p_x / \rho_c U^2} + \underbrace{\nu \left(2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right)}_{1/R_e} - \underbrace{2\Omega w \cdot \cos \phi + 2\Omega v \cdot \sin \phi}_{1/F_r} \quad (Ec. 79)$$

Donde:

- $St = \ell/U \cdot t_c \sim 1$: Es el número de Strouhal.
- $Re = \rho_c U \ell / \mu_c \sim 10^2$: Es el número de Reynolds.
- $Fr = U^2 / \ell f_{mc} \sim 10^{-1}$: Es el número de Froude.

Resultando:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{\substack{1/t_c f_0 \ell \\ \sim 10^{-7}}} + \underbrace{u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}}_{\substack{U/\ell^2 f_0 \\ \sim 10^{-7}}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}}_{\Delta p_x / \rho_c U f_0 \ell} + \underbrace{2\Omega v \cdot \sin \phi}_{o(1)} \quad (Ec. 80)$$

Simplificando los términos cuyo orden de magnitud es inferior al término dominante:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \simeq 2\Omega v \cdot \sin \phi \equiv f \cdot v \quad (Ec. 81)$$

De forma similar al procedimiento realizado con el término según el eje x se procede con el término según el eje y .

$$\underbrace{\frac{\partial v}{\partial t}}_{\substack{1/t_c f_0 \\ \sim 10^{-1}}} + \underbrace{u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}}_{\substack{U/\ell f_0 \\ \sim 10^{-1}}} = - \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}}_{\Delta p_y / \rho_c U^2} + \underbrace{\nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)}_{\substack{1/\ell^2 f_0 \\ \sim 10^{-8}}} - \underbrace{2\Omega u \cdot \sin \phi}_{o(1)} \quad (Ec. 82)$$

Simplificando los términos cuyo orden de magnitud es inferior al término dominante:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \simeq -2\Omega u \cdot \sin \phi \equiv -f \cdot u \quad (Ec. 83)$$

Al igual que en el apartado anterior, en el presente apartado se empleará el método EFG Method, véase 1.3.1, para calcular las componentes de la velocidad estimada. Se partirá por lo tanto de la ecuación (Ec. 84), calculando así la presión estimada. A partir de la presión estimada y con las

ecuaciones del viento geostrófico deducidas anteriormente, representadas por las ecuaciones (Ec. 81) y (Ec. 83).

$$p^h = \sum_{i=0} \sum_{j=0} a_{ij} x^i y^j \quad (\text{Ec. 84})$$

Las ecuaciones (Ec. 85) representan las ecuaciones que permitirán la obtención de las componentes de la velocidad estimada, donde se ha considerado $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$ y el parámetro de Coriolis referido a la latitud media del volumen de control.

$$\begin{aligned} u^h &= -\frac{1}{\rho_0 \cdot f_m} \frac{\partial p^h}{\partial y} \\ v^h &= \frac{1}{\rho_0 \cdot f_m} \frac{\partial p^h}{\partial x} \end{aligned} \quad (\text{Ec. 85})$$

Haciendo uso de la ecuación (Ec. 15) donde se define cual es la derivada de la función que se desea estimar.

$$\frac{\partial p^h(\vec{x})}{\partial x} = \sum_I^n \frac{\partial \phi_I(\vec{x})}{\partial x} \cdot p_I \quad (\text{Ec. 86})$$

$$\frac{\partial p^h(\vec{x})}{\partial y} = \sum_I^n \frac{\partial \phi_I(\vec{x})}{\partial y} \cdot p_I \quad (\text{Ec. 87})$$

Donde $\phi_I(\vec{x})$ queda definido por la ecuación (Ec. 14). Posteriormente la ecuación (Ec. 16) describe como se realiza el cálculo de la derivada de la función $\phi_I(\vec{x})$. Resultando tras la sustitución de la derivada de la matriz $A^{-1}(\vec{x})$ (véase (Ec. 17)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_I(\vec{x})}{\partial x_i} &= \sum_{j=1}^m \frac{\partial p_j(\vec{x})}{\partial x_i} \left(\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{B}}(\vec{x}) \right)_{jI} \\ &+ p_j(\vec{x}) \left[\left(-\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{x})}{\partial x_i} \underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \underline{\underline{B}}(\vec{x}) \right)_{jI} + \left(\underline{\underline{A}}^{-1}(\vec{x}) \cdot \frac{\partial \underline{\underline{B}}(\vec{x})}{\partial x_i} \right)_{jI} \right] \end{aligned} \quad (\text{Ec. 88})$$

Al igual que en el apartado anterior en el que se introducen como puntos de observación las velocidades del viento, la matriz $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ definida en la ecuación (Ec. 13) es el producto de la matriz de monomios traspuesta $\underline{\underline{P}}^T$ por la matriz de ponderación $\underline{\underline{W}}(\vec{x})$ (definida en la ecuación (Ec. 11)) y por la $\underline{\underline{P}}$ (definida en la ecuación (Ec. 10)), mientras que la matriz $\underline{\underline{B}}(\vec{x})$ a su vez es el producto de la matriz $\underline{\underline{P}}^T$ por la matriz $\underline{\underline{W}}(\vec{x})$, la diferencia existente con el caso anterior es que para un punto de observación tan sólo se obtendrá una ecuación para la resolución (para cada punto de observación se dispone de la presión en dicho punto). (Véase Anexo 2, coordenadas puntos de observación y valor de la presión).

Así mismo la derivada de la matriz $\underline{\underline{A}}(\vec{x})$ y $\underline{\underline{B}}(\vec{x})$ se calcularán de acuerdo con las ecuaciones (Ec. 89) y (Ec. 90) respectivamente. Donde como se puede observar tan sólo será necesario derivar la matriz de ponderación $\underline{\underline{W}}(\vec{x})$ ya que es la única matriz que depende de x .

$$\frac{\partial \underline{\underline{A}}(\vec{x})}{\partial x_i} = \underline{\underline{P}}^t \frac{\partial \underline{\underline{W}}(\vec{x})}{\partial x_i} \underline{\underline{P}} \quad (\text{Ec. 89})$$

$$\frac{\partial \underline{\underline{B}}(\vec{x})}{\partial x_i} = \underline{\underline{P}}^t \frac{\partial \underline{\underline{W}}(\vec{x})}{\partial x_i} \quad (\text{Ec. 90})$$

La forma que tiene la función de ponderación puede observarse en la Figura 6 dispone de un máximo en el punto en el que la distancia entre el punto donde se desea calcular la velocidad y el punto de observación es igual a cero, decreciendo de forma Gaussiana a medida que aumenta dicha distancia.

Mientras que la derivada con respecto a la citada distancia, cuya expresión se tiene en (Ec. 91) y su representación gráfica en la Figura 67, donde se observa que para el punto en el que d_I es igual a cero, dicha función se hace igual a cero. Además se puede destacar que se trata de una función negativa, que posee dos mínimos, donde éstos no se producen para $\text{abs}(w) = 1$.

$$\frac{d}{d d_I} w(d_I) = -\frac{2k}{c^2} d_I \frac{e^{-\left(\frac{d_I}{c}\right)^{2k}}}{1 - e^{-\left(\frac{d_{ml}}{c}\right)^{2k}}} \quad \forall d_I \leq d_{ml} \quad (\text{Ec. 91})$$

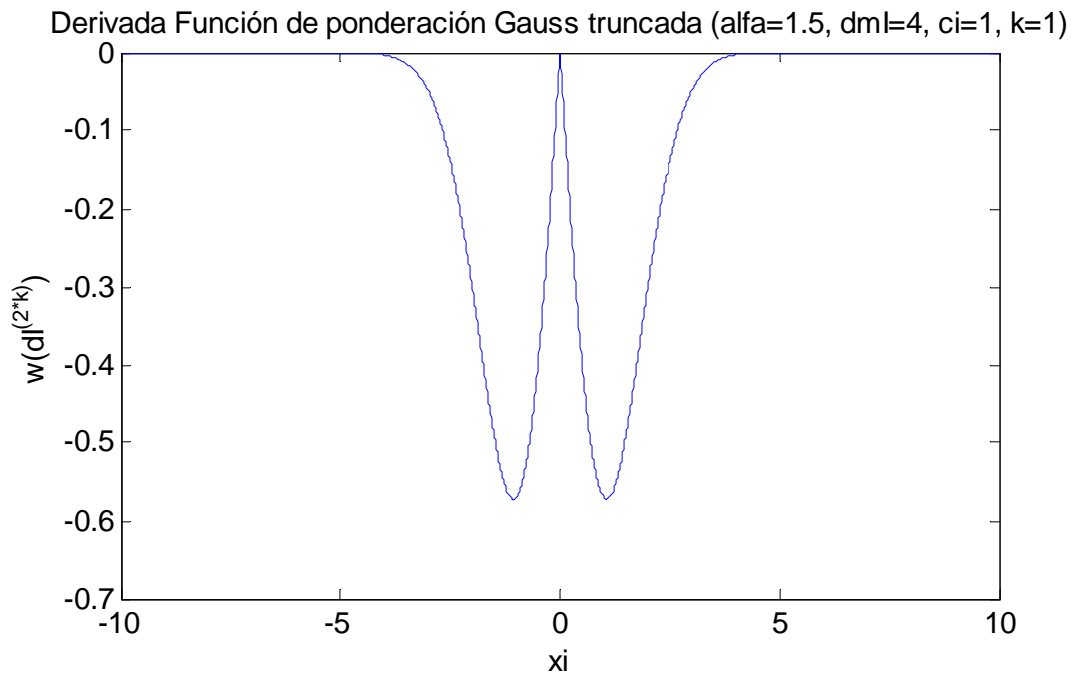


Figura 67: Derivada de la función de ponderación con respecto a d_I

A continuación se analizarán la presión estimada y el campo de velocidades estimado, así como la dependencia de las variables del problema (grado máximo de la presión y número de puntos de observación empleados, intensidad del campo de vientos). (Véase Anexo 4, código desarrollado en Matlab)

Se comenzará con el estudio del modelo realizado para el campo de velocidades más turbulento. En la Figura 68 se tiene la representación gráfica de la presión real, con una exactitud de $\pm 10 Pa$, en todos los puntos de la superficie de control estudiada con una resolución de $0,5^\circ$ en longitud y en latitud aproximadamente ($1.586248e+004m$), donde el objetivo principal del modelo realizado será estimar dicha presión con el menor error posible.

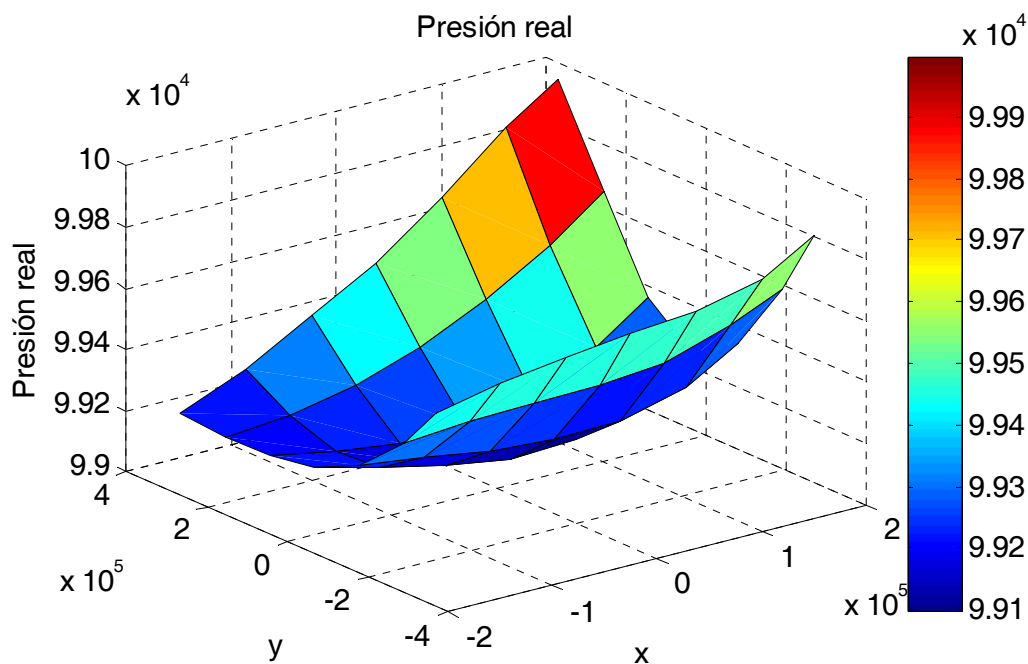


Figura 68: Presión Real, campo de vientos más turbulento

La Figura 69 muestra las isobaras reales junto con los vectores del campo de vientos. Se puede observar que la zona indicada con puntos rojos no cumple las hipótesis del viento geostrófico, ya que en un viento geostrófico el vector velocidad del viento es tangente a las isobaras, este hecho es debido a que en dichas zonas el viento cambia la dirección de forma brusca y por lo tanto será importante la contribución de la aceleración centrípeta, dejando de ser un viento geostrófico. Por lo que la aproximación realizada no proporcionará buenos resultados en dicha zona, ya que se ha empleado para la estimación del campo de vientos las ecuaciones del viento geostrófico.

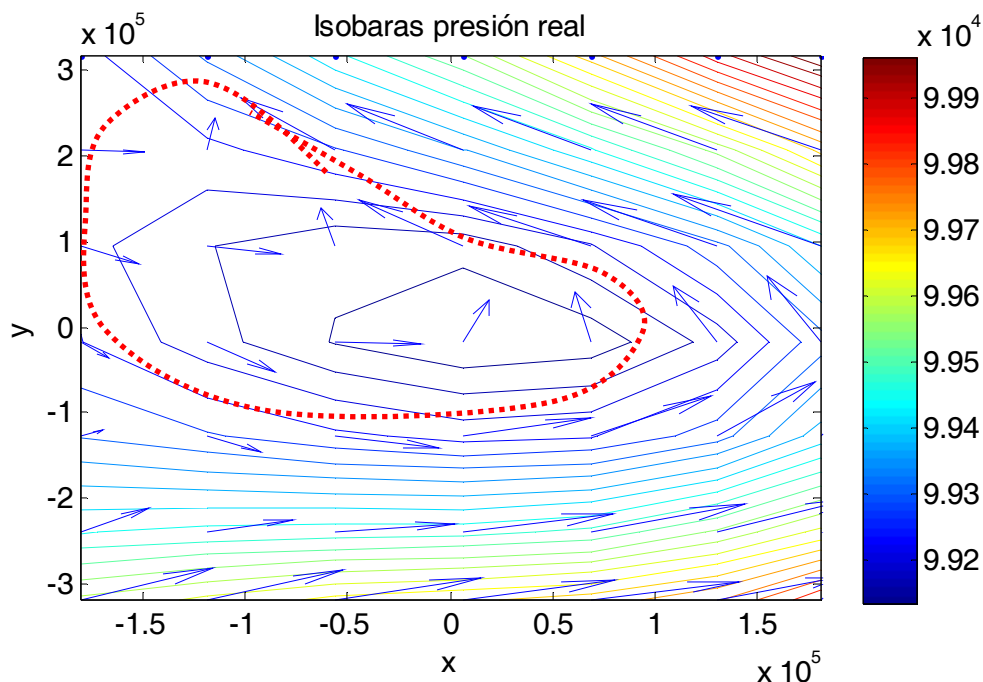


Figura 69: Isobaras-Vectores campo de vientos más turbulento

Para apreciar el efecto de las variables es necesario realizar las simulaciones permaneciendo variando una de las variables y permaneciendo constante el resto. Se ha realizado por tanto cuatro simulaciones: dos con 30 puntos de observación y para orden 3 y 5 de la función de presión y otras dos para 40 puntos con los mismos órdenes en la función de presión.

En la Figura 70, Figura 71, Figura 72 y Figura 73 se disponen de 4 representaciones. La superior izquierda muestra el resultado de la presión estimada para los puntos del espacio aéreo, y que debe coincidir con la presión real de la Figura 68.

La superior izquierda nos representa las isobaras (curvas de presión constante, de la figura superior izquierda) junto con los vectores del campo de vientos estimados, donde se puede observar que en todo momento los vectores son tangentes a las isobaras y que el campo de velocidades estimado no representa de una forma aceptable el campo de vientos reales que se puede observar en la Figura 69.

Las representaciones inferiores nos muestran los errores relativos en presión y en velocidad al valor medio de presión y velocidad real, y en los que se aprecia que los errores en presión son del orden de un 0,1% , mientras que los errores en velocidad son como mínimo del 100% . Los errores representados en velocidad en la representación inferior derecha se han calculado considerando tan solo el módulo, se ha de resaltar que aunque resultase una buena aproximación en módulo (no siendo el caso) habría que comparar las componentes del vector, ya que la dirección del mismo debe tener un error reducido, aunque se ha optado por representar tan sólo el módulo debido a que sus resultados no son aceptables y por lo tanto la estimación mediante este método tampoco.

Tras analizar la Figura 70, Figura 71, Figura 72 y Figura 73 se puede observar que para un campo de vientos más turbulento, al aumentar el grado del polinomio de la presión mejora los resultados tanto de la presión estimada como de la velocidad estimada, para un mismo número de puntos de

observación, al igual que al aumentar los puntos de observación para un mismo grado de la presión, como ocurría en el modelo del apartado 3.2.1. Así mismo se observa que para los puntos centrales de la superficie de control el error es mucho menos que para los puntos frontera, debido a que para los puntos frontera no se dispone de información del estado del campo en todo su entorno, a diferencia de lo que sucede para los puntos interiores.

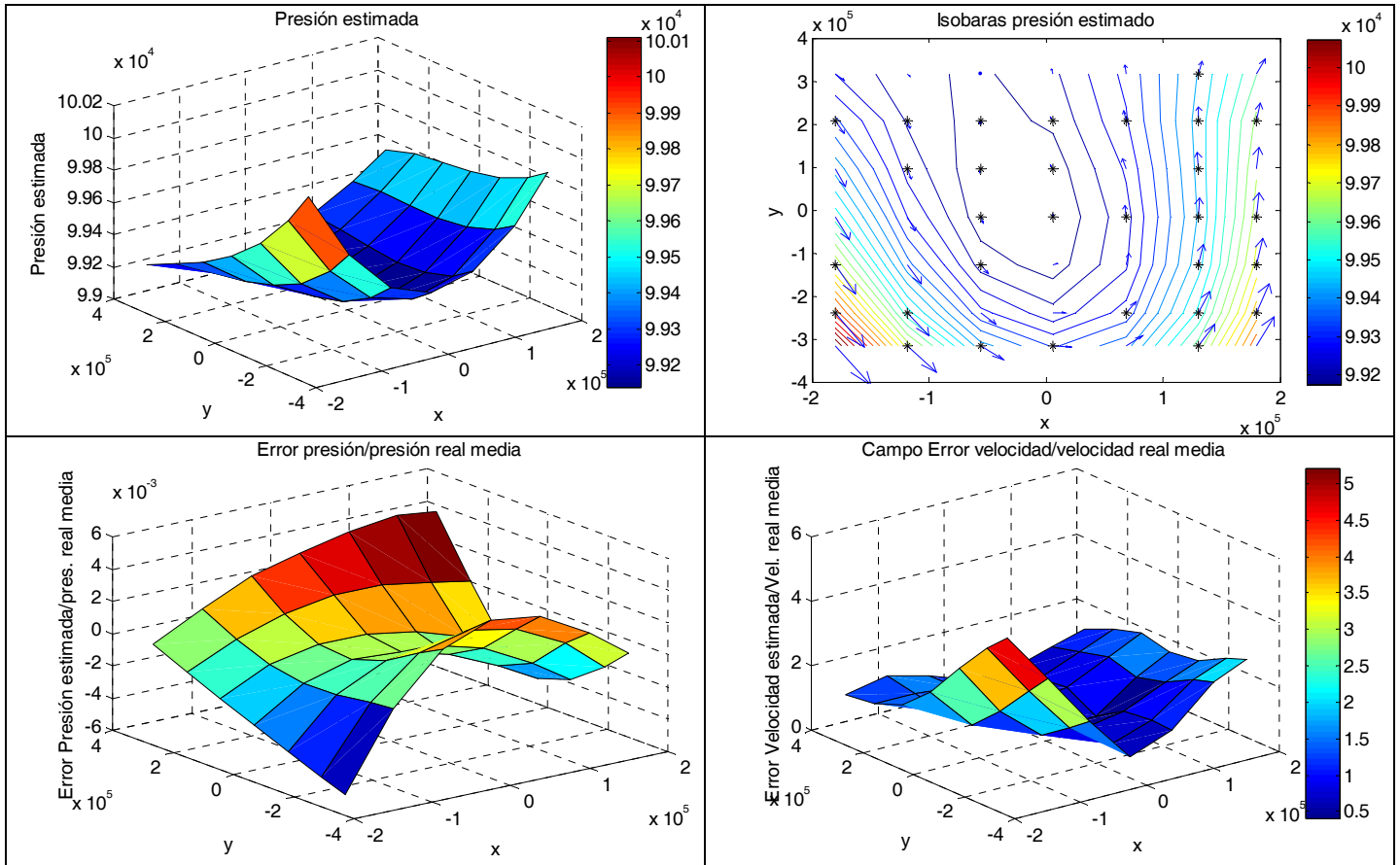
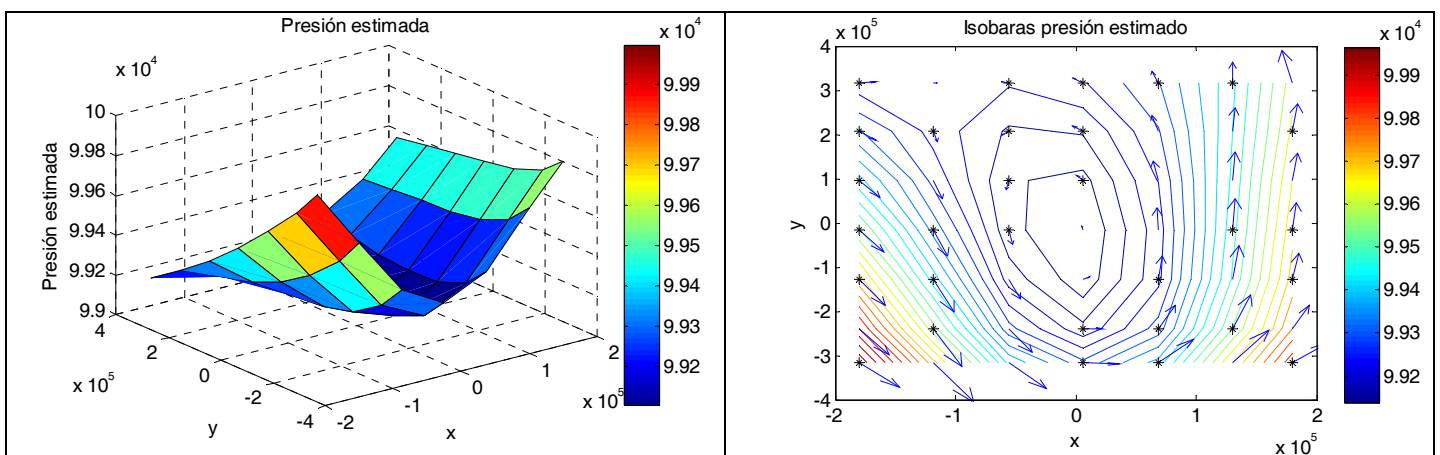


Figura 70: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior derecha) con grado 3 presión para un campo de velocidades más turbulento



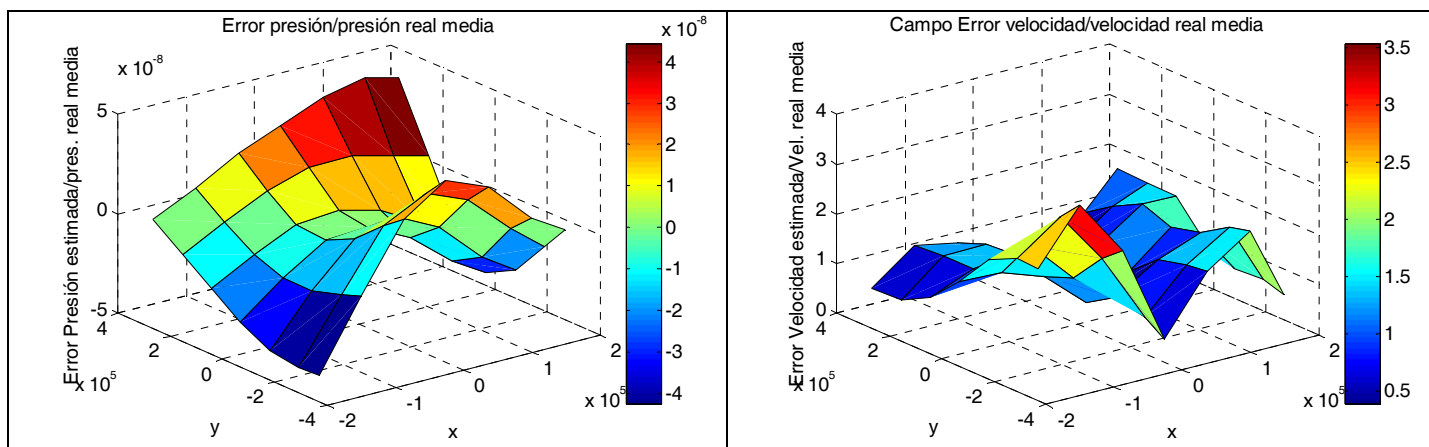


Figura 71: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más turbulento

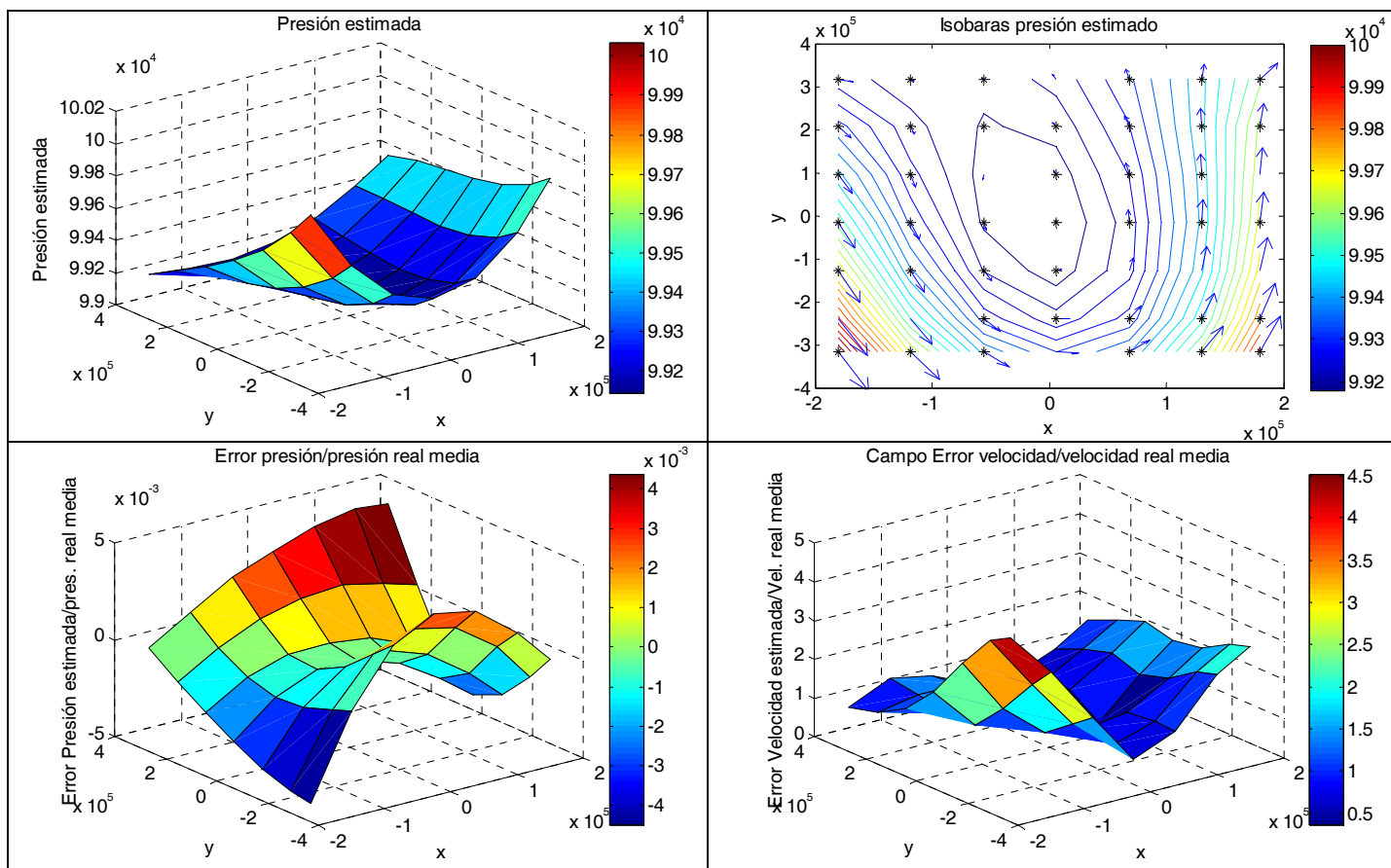


Figura 72: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 3 presión para un campo de velocidades más turbulento

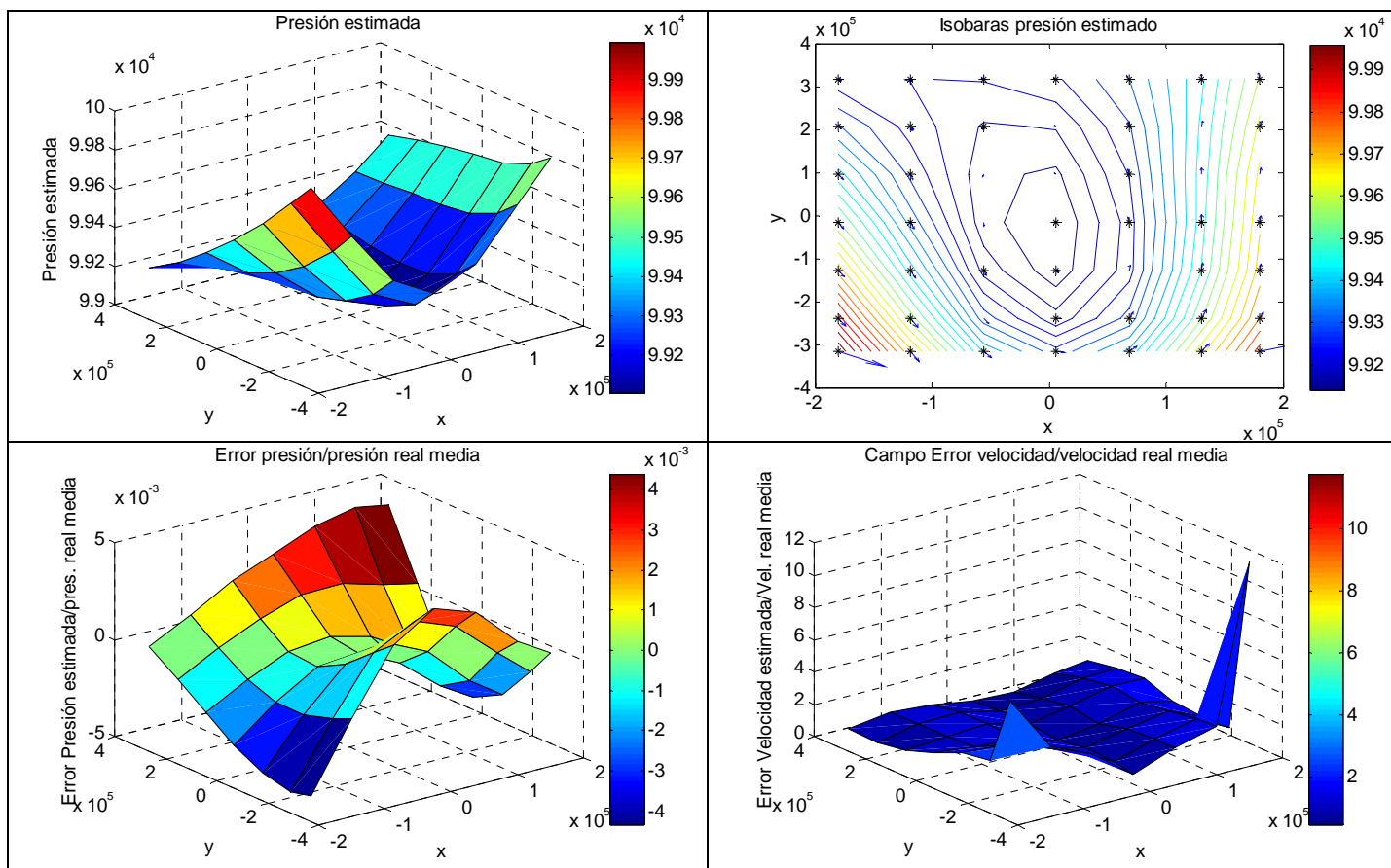


Figura 73: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más turbulento

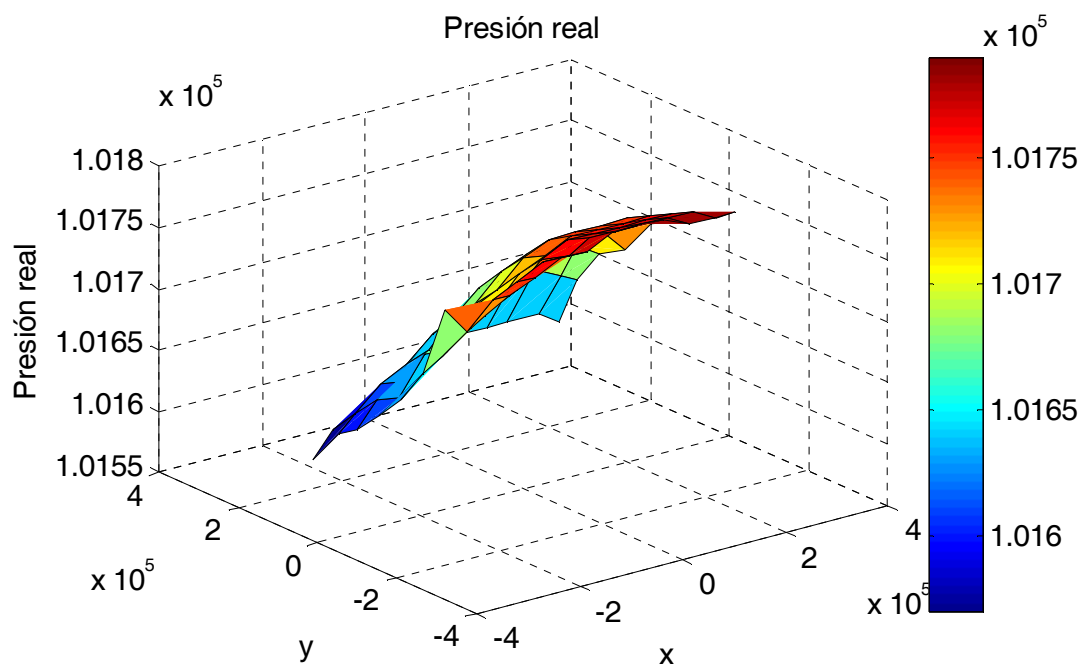


Figura 74: Presión Real, campo de vientos más laminar

Finalmente se estudiará el modelo realizado para el campo de velocidades más laminar. En la Figura 74 se tiene la representación gráfica de la presión real, con una exactitud de $\pm 10 Pa$, en todos los puntos de la superficie de control estudiada con una resolución de $0,5^\circ$ en longitud y en latitud aproximadamente ($1.586248e+004m$) al igual que para el caso del viento más turbulento, donde habrá que estimar dicha presión con el menor error posible.

La Figura 75 muestra las isobaras reales junto con los vectores del campo de vientos. Se puede observar que la zona indicada con puntos rojos no cumple las hipótesis del viento geostrófico, ya que en un viento geostrófico el vector velocidad del viento es tangente a las isobaras, este hecho es debido a que en dichas zonas el viento cambia la dirección de forma brusca y por lo tanto será importante la contribución de la aceleración centrípeta, dejando de ser un viento geostrófico. Por lo que la aproximación realizada no proporcionará buenos resultados en dicha zona, ya que se ha empleado para la estimación del campo de vientos las ecuaciones del viento geostrófico. Así mismo en la zona de puntos negros tampoco se observa que los vectores velocidad sean tangentes a las isobaras hecho que puede deberse a la falta de resolución de los datos medidos en la superficie de control.

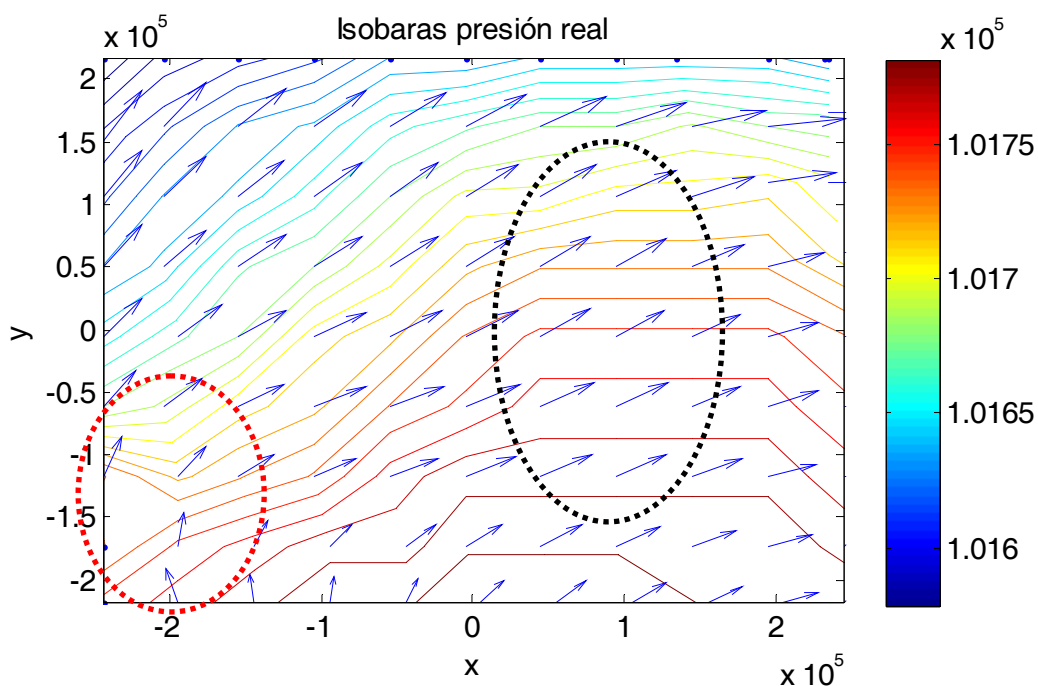


Figura 75: Isobaras-Vectores campo de vientos más laminar

Procediendo de forma análoga al estudio para un campo de vientos más turbulento, en la Figura 76, Figura 77, Figura 78 y Figura 79 se disponen de los 4 tipos de representaciones explicados anteriormente.

La diferencia que se observa con respecto al campo de vientos más turbulento es que, la función de la presión en este caso no dispone de ningún mínimo/máximo, y por lo tanto un grado pequeño en la presión será suficiente para tener una buena aproximación. Además los resultados para la estimación del campo de velocidades son peores a medida que se aumenta el grado de la presión, debido a que al aumentar el grado la presión estimada es más precisa pero dispone de más variaciones en cuanto a la pendiente y por lo tanto la estimación del campo de velocidades diferirá en mayor medida.

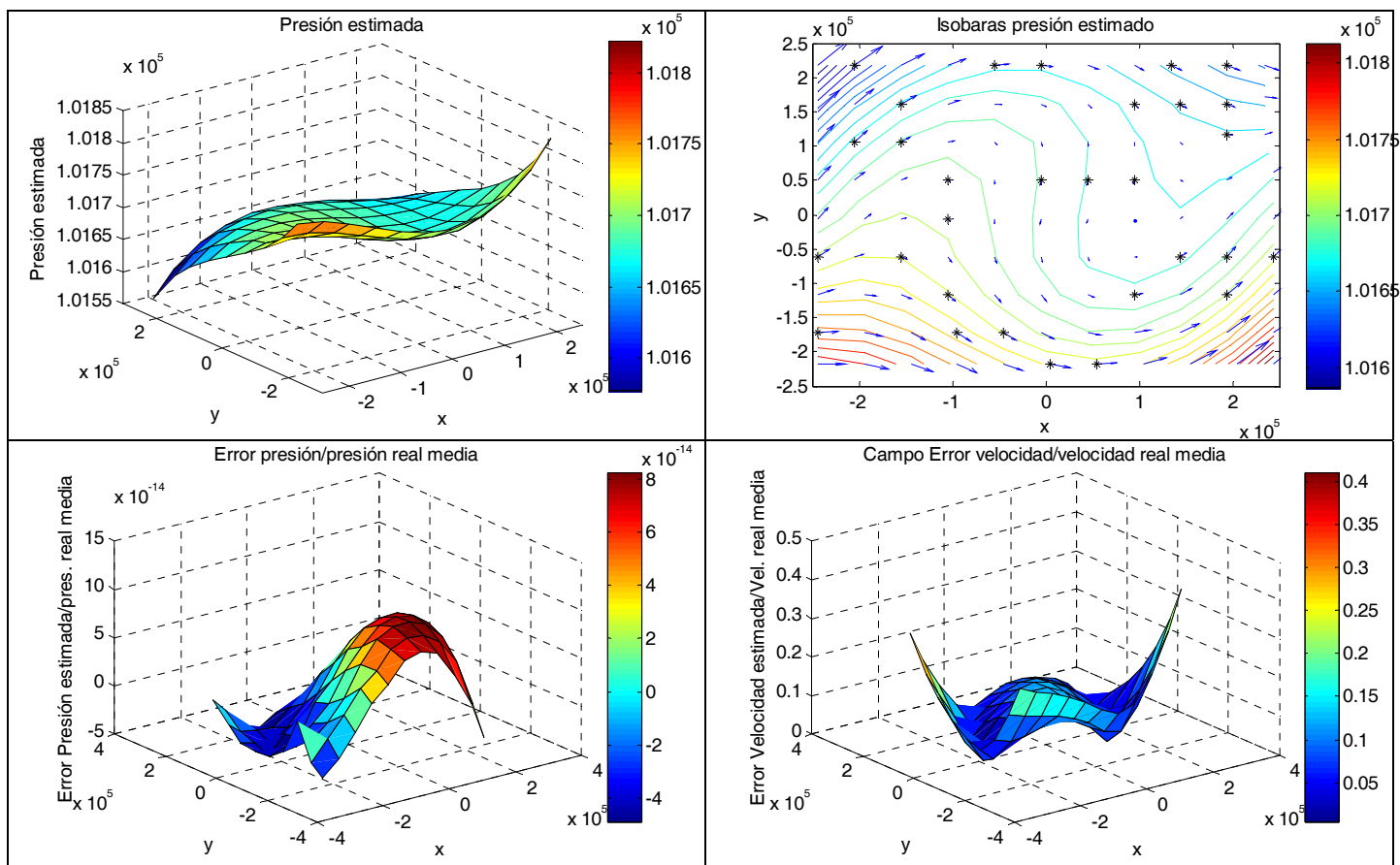
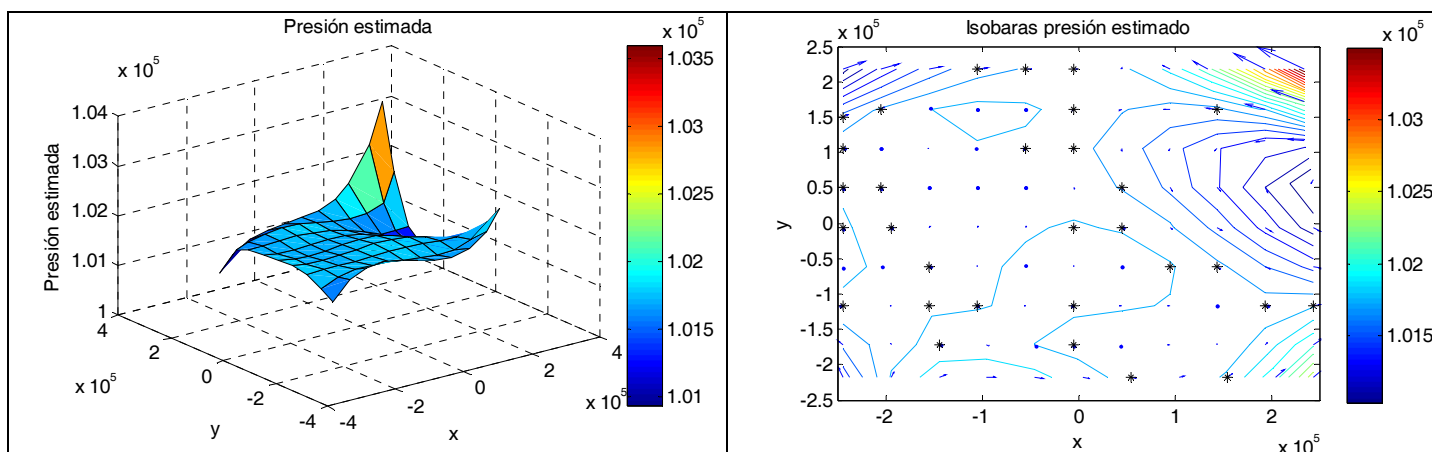


Figura 76: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior derecha) con grado 3 presión para un campo de velocidades más laminar



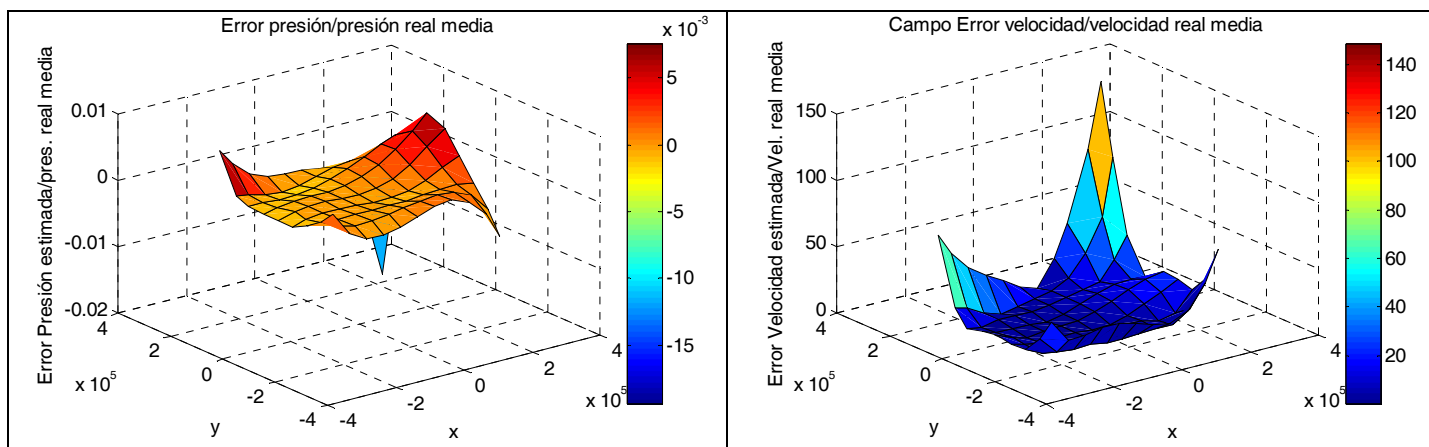


Figura 77: Resultados simulación con 30 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más laminar

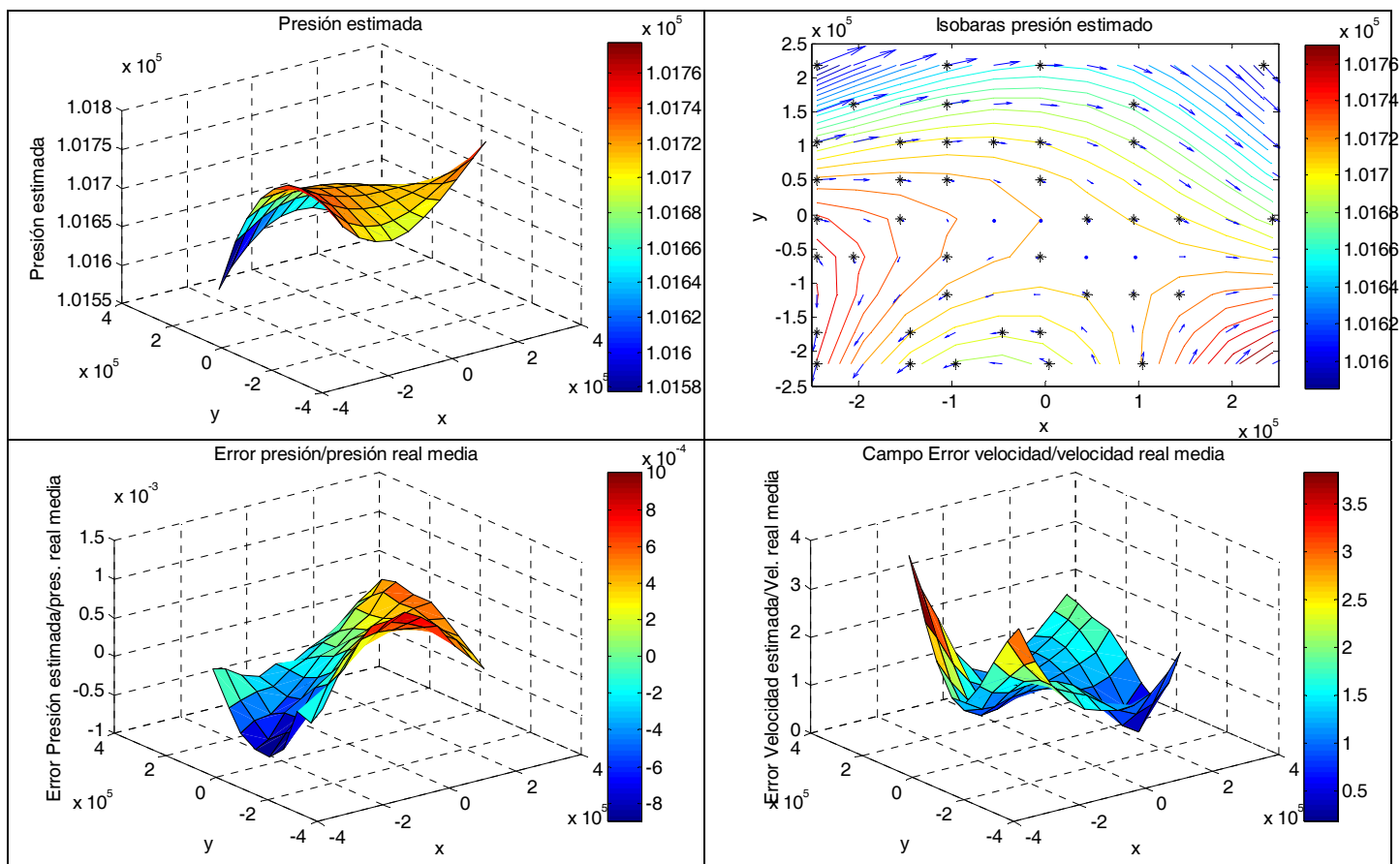


Figura 78: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 3 presión para un campo de velocidades más laminar

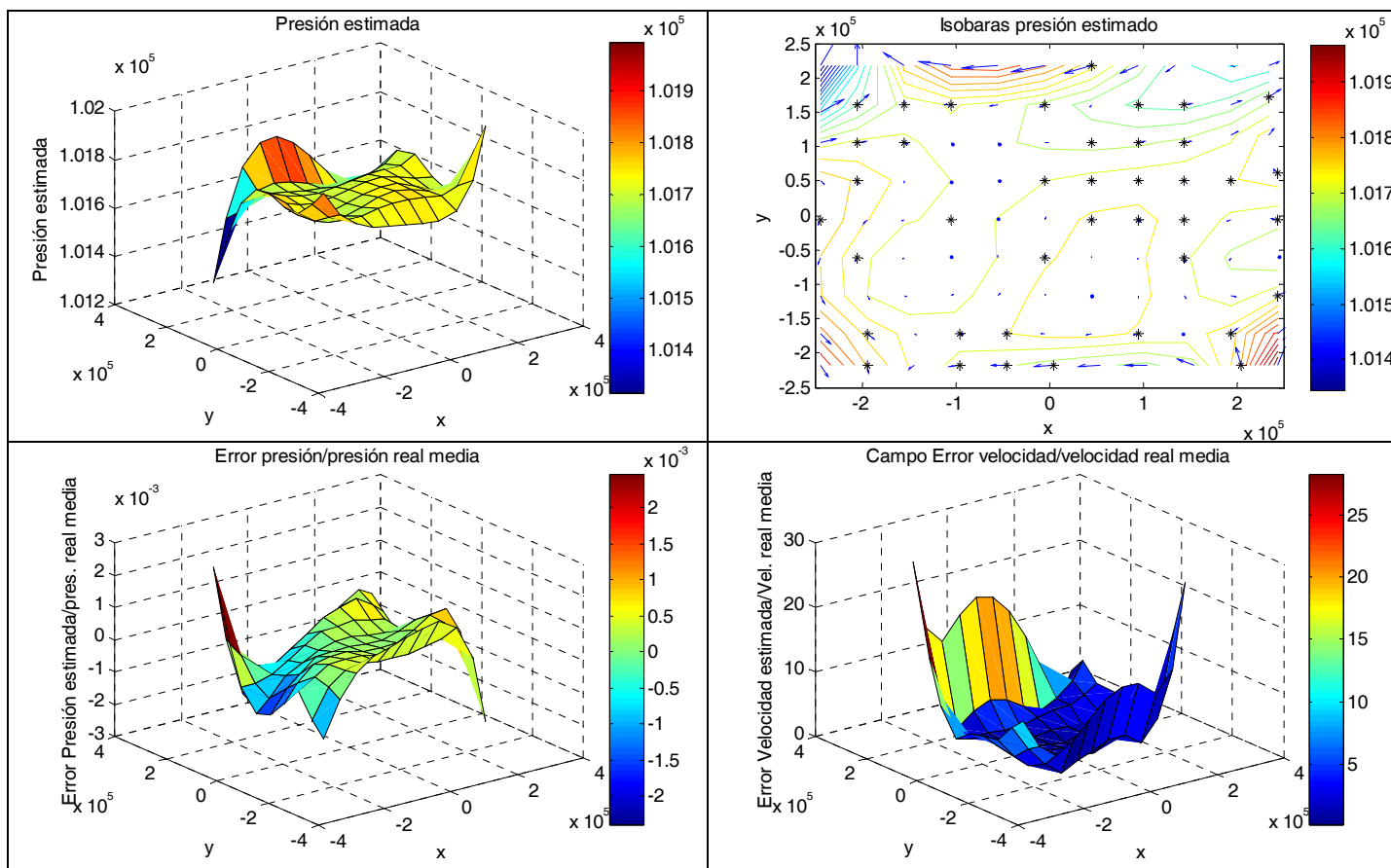


Figura 79: Resultados simulación con 40 puntos de observación (* figura superior izquierda) con grado 5 presión para un campo de velocidades más laminar

3.2.2.1. Conclusión

Se puede concluir que al simular un campo de vientos más empleando el valor de la presión en los nodos, los errores producidos no son admisibles y por lo tanto no es un buen método para estimar las velocidades del campo de vientos.

Una de las posibles causas del no funcionamiento del método es que aunque el resultado de la simulación de la presión tiene mucha precisión, produce resultados con mucho error en la velocidad debido a que esta se estima con al pendiente de la presión y la aproximación por mínimos cuadrados lo único que pretende es que el error entre el valor estimado y el medido sea el menos posible, sin tener en cuenta la pendiente de la función. Este hecho puede observarse en que a medida que aumenta el grado de la presión la aproximación proporciona peores resultados, debido que a medida que se aumenta el grado las pendientes difieren más.

4. REFERENCIAS

- [1] Modelización y simulación numérica de campos de viento mediante elementos finitos adaptativos en 3-D. Eduardo Rodríguez Barrera.
- [2] Construcción de un Modelo Tridimensional para Ajuste de Campos de Viento y Dispersión de Contaminantes en la Atmósfera. Nancy Sanín Cortés.
- [3] Meteorología-CC.AA.-2009-10. Tema 6: Presentación II. Francisco José Alvares García. Universidad de Alcalá de Henares. <http://www2.uah.es/clima/Personal/paco.html>
- [4] Método de separación de variables. José Rodellar y Andrés Encinas.
- [5] Ecuación de Laplace. Universidad de Navarra. <http://www.unav.es/>
- [6] Element-Free Galerkin Methods. T. Belytschiko, Y.Y. Lu and L. GU. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol 37,229-256 (1994).
- [7] Estudio de dos métodos sin malla para la resolución de ecuaciones elípticas. Estimación del error. José Luis Cuesta Molina.
- [8] Numerical Development of an Improved Element-Free Galerkin Method for Engineering Analysis. Zhang Zan. Agosto 2009.
- [9] Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon. Computational Mechanics. Volume 10. Number 5. Septiembre 1992. Pág 307-318.
- [10] Mecánica de Fluidos (Primera Parte). Amable Liñan Martínez. Escuela Técnica Superior de Ingenieros Aeronáuticos. Madrid, Septiembre 2005.
- [11] Meteorología Aplicada a la Aviación. Manuel Ledesma y Gabriel Baleriola. 13ª Edición. Thomson Paraninfo. ISBN: 978-84-283-2942-2. Depósito Legal: M-30.887-2007.
- [12] Why particle method work. Journal on Scientific and Statistical Computing. 1982, 3. Pág 422-433.
- [13] <http://www.faa.gov/>
- [14] Aeronautical Information Manual. Official Guide to Basic Flight Information and ATC Procedures. U.S. Department of Transportation. Federal Aviation Administration (FAA). Febrero 2010.
- [15] Vigilancia dependiente automática (ADS) AENA. www.aena.es
- [16] Automatic Dependent Surveillance- Broadcast (ADS-B) Out Performance Requirements to Support Air Traffic Control (ATC) Service. 14 CFR Part 91; Final Rule. Part III. Department of Transportation. Federal Aviation Administration (FAA). Mayo 2010.
- [17] Telecomunicaciones Aeronáuticas. Organización de Aviación Civil Internacional. Anexo 10. Volumen IV. Capítulo 3. Julio de 2007.

- [18]Minimum Operational Performance Standards for 1090 MHz Extended Squitter Automatic Dependent Surveillance-Broadcast (ADS-B) and Traffic Information Services-Broadcast (TIS-B). RTCA DO 260B.
- [19]The ATM Target Concept D3. SESAR Definition Phase- Deliverable 3. SESAR Consortium. Doc No: DLM-0612-001-02-00. Septiembre de 2007.
- [20]Using Wide Area Differencial GPS to Improve Total System Error for Precision Flight Operations. Stanford University. Keith W. Alter. Diciembre de 2000.
- [21]Triángulo de Pascal. Lecciones populares de matemáticas. Editorial MIR Moscú. V.A. Uspenski. 1978.
- [22]Sistemas de Referencia en Geodesia. Emilio Benitez Aguado Y Luis García-Asenjo Villamayor. Geodesia, Cartografía Matemática, G.P.S., Laboratorio de Geodesia VALENCIA

5. ACRÓNIMOS

A

ADS-B Automatic Dependent Surveillance-Broadcast	10, 11, 75, 96
ADS-R Automatic Dependent Surveillance Rebroadcast	101
ARA Active Resolution Advisories	102
ASM Airspace Management	25
ATC Air Traffic Control	25, 96, 97
ATFM Air Traffic Flow Management	25
ATM Air Traffic Management	25

C

CDTI Cockpit Display of Traffic Information	96
CPA Closest Point of Approach	97
CPR Compact Position Reporting	98, 99

D

DEM Diffuse Element Method	11
DOP Dilution Of Precision	58, 59, 111

E

EFG Element Free Galerkin	11
---------------------------	----

F

FCU Flight Control Unit	101
FEM Finite Element Method	12
FMS Flight Management System	101
FTE Flight Technical Error	26

G

GLONASS Global'naya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema	96
GNSS Global Navigation Satellite System	98
GS Ground Speed	29

I

IAS Indicated Airspeed	100
ICAO International Civil Aviation Organization	97

M

MCP Mode Control Panel	101
------------------------	-----

MLS	Moving Least-Squares	12, 14
MTE	Multiple Threat Encounter	102

N

NAC _p	Navitation Accuracy Category for Position	97, 101
NAC _v	Navigation Accuracy Category for Velocity	97, 100
NextGen	Next Generation AirTransport System	10, 25
NIC	Navigation Integrity Category	98, 102
NSE	Navigation System Error	26

O

OACI	Organización de Aviación Civil Internacional	25
------	--	----

P

PDE	Path Definition Error	26
-----	-----------------------	----

S

SDA	System Design Assurance	98
SESAR	Single European Sky ATM Research	10, 25
SIL	Source Integrity Level	98, 101, 102

T

TAS	True Airspeed	26, 100
TCAS	Traffic Collision Avoidance System	101
TID	Threat Identity Data	102
TTI	Threat Type Indicator	102

Anexo 1 Mensajes ADS-B

El sistema ADS-B es una técnica de de vigilancia cooperativa del control de tráfico aéreo (ATC). El funcionamiento consiste en calcular con ayuda de los sistemas de posicionamiento por satélite (GPS, GALILEO o GLONASS) la posición de la aeronave y esta es enviada en todas direcciones junto con otros datos adquiridos directamente de la aeronave (altitud, velocidad, etc.) por medio del transpondedor de la aeronave a través de diferentes tecnologías de enlace de datos: *Squitter* Extendido Modo-S (1090MHz), Universal Access Transceiver (UAT) (960-1215MHz) y mediante enlace de datos VHF (VDL Modo 4).

El enlace 1090 ES se emplea cuando las aeronaves están a nivel de vuelo 180 o superior, mientras que el enlace UAT para las que operan a 18000ft o por debajo. (Véase referencia [14], página 4-5-14)

Como indica la referencia [15] *“La ADS tiene dos características definitorias fundamentales: es automática, es decir, no necesita la intervención del piloto para que los datos de la aeronave sean enviados a la torre de control y es dependiente, porque la información necesaria es generada en la misma aeronave, es decir, depende de los sistemas de a bordo.”* Por lo tanto se puede disponer de mayor información siendo esta más precisa ya que proviene directamente de la aeronave y puede ser utilizado por los sistemas de control de tránsito aéreo, así como por el resto de aeronaves circundantes para una mejor gestión y seguridad del tráfico aéreo.

Además de las ventajas expuestas con anterioridad en el uso del sistema ADS-B cabe destacar que aumenta la cobertura de los servicios de vigilancia en zonas donde no existe cobertura radar (zonas de baja altitud, zonas de orografía montañosa o zonas oceánicas).

En cuanto a la estructura técnica del ADS puede estar clasificada en dos entornos, tal y como publica la referencia [15]:

- **Aire (aeronave):**
 - Sistema de navegación que proporciona datos de la aeronave tales como: identidad, posición, etc.
 - Aplicación ADS que gestiona el procesado, codificación y transmisión de los datos ADS.
 - Equipo de enlace de datos que transmite los informes de ADS-B a otras aeronaves y a los sistemas de tierra.
 - Puede existir una pantalla (CDTI) donde se presenten las posiciones del tráfico circundante.
- **Tierra:**
 - Equipo de enlace de datos, el cual funciona de manera semejante al que se dispone en la aeronave.
 - Aplicación ADS que gestiona la recepción de la información enviada desde el aire.
 - Equipo de tratamiento de datos de vigilancia el cual procesa la información y la hace llegar al resto de sistemas ubicados en tierra (Centros de control).



Figura 80: ADS-B. [13]

Los mensajes ADS-B de acuerdo con los documentos ED-126/DO-260 deben contener como mínimo los siguientes datos de transmisión (véase referencia [16] pág. 30194-30195):

1. La longitud y el ancho de la aeronave.
2. Posición de la aeronave; longitud y latitud.
3. Altitud barométrica de la aeronave.
4. Velocidad de la aeronave.
5. Indicación si está instalado en la aeronave el TCAS II o el ACAS y operando de tal forma que puedan generar avisos RA¹¹.
6. Indicación si está disponible RA, al poseer del sistema TCAS II o ACAS.
7. Una indicación del código del transpondedor Modo 3/A especificado por ATC.
8. Un indicativo para la señal de llama de la aeronave o la matrícula de la misma, que es presentada en el plan de vuelo. Si no tuviera que ser necesario la presentación del plan de vuelo se utiliza un TSO-C154c auto-asignado temporalmente de 24bits.
9. Identificación de situación de emergencia identificada por la tripulación de vuelo, fallo en las comunicaciones o interferencia ilegal.
10. Identificación de la aeronave a ATC.
11. Identificación ICAO de la aeronave 24 bits, excepto cuando el piloto no ha presentado el plan de vuelo que se utiliza un TSO-C154c auto-asignado temporalmente de 24bits.
12. Indicador de la categoría de la aeronave.
13. Indicador de altitud geométrica de la aeronave.
14. Indicador del NAC_p.
15. Indicador del NAC_v.

¹¹ RA (Resolution Advisories): Mensaje generado por el sistema TCAS II, es incorporado en el indicador de velocidad vertical, es necesario que la aeronave disponga de transponder Modo C o S. Se produce en el momento en que en que dos aeronaves se encuentran entre 20 y 30 segundos del CPA (Punto de Máxima Aproximación), apareciendo un aviso acústico así como la maniobra a realizar en el plano vertical.

16. Indicador del NIC.
17. Indicador del SDA.
18. Indicador del SIL.

Además según se hace referencia también en [16], la aeronave debe transmitir su posición geométrica en no más de 2 segundos desde que se mide la posición hasta que se transmite. A su vez debe transmitir la posición y velocidad al menos una vez por segundo estando en el aire o en la superficie del aeropuerto.

Si se utiliza el enlace de datos *Squitter* Extendido Modo-S existen 24 formatos de interrogación o enlace ascendente y 24 formatos de respuesta o enlace descendente, para obtener más detalles de los mismos véase páginas 3-88 y 3-89 de la referencia [17]. Siendo interesantes tan sólo para el caso que nos ocupa los que se muestran en la Figura 81, debido a que son los correspondientes a las señales espontáneas ampliadas. Donde los primeros 5 bits (1-5) indican el formato al que pertenece, los siguientes 3 bits (6-8) CA (Informa de la capacidad del transmisor ADS-B basado en transpondedor Modo-S) o CF (especifica si la identificación ICAO de la aeronave está contenida), los 24 bits (9-32) sucesivos pertenecen a la identificación ICAO de la aeronave, seguidamente se encuentra el mensaje ME formado por 56 bits (33-88) que siempre tiene lugar en los mensajes *Squitter* Extendido 1090 MHz y finalmente los 24 bits (89-112) de paridad.

17	10001	CA:3	AA:24	ME:56	PI:24 Señales espontáneas ampliadas
18	10010	CF:3	AA:24	ME:56	PI:24 Señales espontáneas ampliadas/no transpondedor

Figura 81: Estructura formatos 17 y 18, enlace descendente.[17]

Los tipos de mensajes ADS-B existentes dependiendo de cómo sea el mensaje ME, se pueden agrupar en los siguientes:

1. Mensaje ADS-B de posición en el aire de la aeronave (Referencia [18] páginas 50-69). Es de destacar en lo relativo al presente mensaje que proporciona altitud barométrica relativa a la presión estándar 1013,25 mbar o altitud GNSS sobre el elipsoide de referencia.

Tabla 9: Mensaje ADS-B de Posición de la aeronave en el aire

Bits Mensaje	33-37	38-39	40	41-52	53	54	55-71	72-88
Bits "ME"	1-5	6-7	8	9-20	21	22	23-39	40-56
Nombre campo mensaje	Código Tipo Mensaje (5 Bits)	Estado de Vigilancia (2 Bits)	Suplemento-B NIC (1 Bit)	Altitud (12 Bits)	Tiempo (T) (1 Bit)	Formato CPR (F) (1 Bit)	Cifrado de Latitud CPR (17 Bits)	Cifrado de Longitud CPR (17 Bits)

2. Mensaje ADS-B de posición en superficie de la aeronave (Referencia [18] páginas 69-81). El formato de bits empleado para este tipo de mensajes se observa en la Tabla 10.

Tabla 10: Mensaje ADS-B de posición de la aeronave en superficie

Bits Mensaje	33-37	38-44	45	46-52	53	54	55-71	72-88
Bits "ME"	1-5	6-12	13	14-20	21	22	23-39	40-56

Nombre campo mensaje	Código Tipo Mensaje (5 Bits)	Movimiento (7 Bits)	Heading/ Estado del Track (1 Bit)	Heading/ Track (7 Bits)	Tiempo (T) (1 Bit)	Formato CPR (F) (1 Bit)	Cifrado de Latitud CPR (17 Bits)	Cifrado de Longitud CPR (17 Bits)
----------------------	------------------------------	---------------------	-----------------------------------	-------------------------	--------------------	-------------------------	----------------------------------	-----------------------------------

3. Mensaje ADS-B de identificación y categoría de la aeronave (Referencia [18] páginas 82-84). En el sub-campo carácter de identificación debe encontrarse la siguiente información:

- Si se dispone de plan de vuelo, debe codificarse la identificación empleada en el mismo.
- Si no se dispone de plan de vuelo, debe codificarse la marca de registro de la aeronave.
- Los vehículos de superficie deben codificar su identificación de radio.

Tabla 11: Mensaje ADS-B de identificación y categoría de la aeronave

Bits Mensaje	Bits ME	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits ME	Nombre campo mensaje
33-37	1-5	Código Tipo Mensaje (5 Bits)	59-64	27-32	Carácter de Identificación 4 (6 Bits)
38-40	6-8	Categoría ADS-B Emisor (3 Bits)	65-70	33-38	Carácter de Identificación 5 (6 Bits)
41-46	9-14	Carácter de Identificación 1 (6 Bits)	71-76	39-44	Carácter de Identificación 6 (6 Bits)
47-52	15-20	Carácter de Identificación 2 (6 Bits)	77-82	45-50	Carácter de Identificación 7 (6 Bits)
53-58	21-26	Carácter de Identificación 3 (6 Bits)	83-88	51-56	Carácter de Identificación 8 (6 Bits)

4. Mensaje de velocidad de la aeronave en vuelo (Referencia [18] páginas 84-103). Debido a la importancia que tiene este tipo de mensaje en el presente proyecto, ya que se toman como valores de entrada los datos de velocidad del aire proporcionados por cada una de las aeronaves, será estudiado con más detenimiento.

Existen 4 subtipos de mensajes (véase Tabla 12 y Tabla 13):

- **Subtipo 1** es para el caso en el que se disponga de la velocidad respecto a tierra y no se esté en un entorno de vuelo no supersónico.
- **Subtipo 2** es para el caso que se disponga de la velocidad respecto a tierra y se encuentre en vuelo supersónico (velocidad Este/Oeste o la Norte/Sur está por encima de 1022 knots).
- **Subtipo 3** es para el caso en el que no se disponga de la velocidad respecto a tierra y no se esté en un entorno de vuelo no supersónico.
- **Subtipo 4** es para el caso que no se disponga de la velocidad respecto a tierra y se encuentre en vuelo supersónico (velocidad Este/Oeste o la Norte/Sur está por encima de 1022 knots).

Tabla 12: Mensaje ADS-B de velocidad de la aeronave en vuelo subtipo 1 y 2

Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje
--------------	-----------	----------------------	--------------	-----------	----------------------

33-37	1-5	Tipo Mensaje (5 Bits)	58-67	26-35	Velocidad N/S (10 Bits)
38-40	6-8	Subtipo Mensaje (3 Bits)	68	36	Tipo Ratio Vertical (1 Bit)
41	9	Intención de cambio (1 Bit)	69	37	Signo Velocidad Vertical (1 Bit)
42	10	Reservado-A (1 Bit)	70-78	38-46	Velocidad Vertical (9 Bits)
43-45	11-13	NAC _v (3 Bits)	79-80	47-48	Reservado-B (2 Bits)
46	14	Dirección Velocidad E/O (1 Bit)	81	49	Signo Diferencia Altitud Barométrica (1 Bit)
47-56	15-24	Velocidad E/O (10 Bit)	82-88	50-56	Diferencia de altitud Barométrica (7 Bits)
57	25	Dirección N/S (1 Bit)			

Cabe destacar que el campo correspondiente al tipo de velocidad respecto al aire que aparece en la Tabla 13 (bit de “ME” número 25) puede tener el valor 0 para el caso en que se trate de IAS¹² ó 1 si se tratase de TAS¹³.

Tabla 13: Mensaje ADS-B de velocidad de la aeronave en vuelo subtipo 3 y 4

Bits Mensaje	Bits “ME”	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits “ME”	Nombre campo mensaje
33-37	1-5	Tipo Mensaje (5 Bits)	58-67	26-35	Velocidad Respecto al aire (10 Bits)
38-40	6-8	Subtipo Mensaje (3 Bits)	68	36	Tipo Velocidad Vertical (1 Bit)
41	9	Intento de cambio (1 Bit)	69	37	Signo Velocidad Vertical (1 Bit)
42	10	Reservado-A (1 Bit)	70-78	38-46	Velocidad Vertical (9 Bits)
43-45	11-13	NAC _v (3 Bits)	79-80	47-48	Reservado-B (2 Bits)
46	14	Estado <i>Heading</i> (1 Bit)	81	49	Signo Diferencia Altitud Barométrica (1 Bit)

¹² IAS (Indicated Airspeed): Es la velocidad que proporciona el indicador de velocidad respecto del aire (Airspeed Indicator) obtenida a través del tubo *pitot*, cuya característica fundamental es que no es corregida ni por altitud, ni por temperatura, ni por densidad, ni por el error del instrumento.

$$IAS = \sqrt{7 \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p_t - p_a}{p_0} + 1 \right)^{\frac{1}{3.5}} - 1 \right]}$$

¹³ TAS (True Airspeed): Indica la velocidad de la aeronave respecto al aire relativa a la atmósfera no perturbada.

$$TAS \cong \sqrt{7 \frac{p_a}{\rho_0} \left[\left(\frac{p_t - p_a}{p_0} + 1 \right)^{\frac{1}{3.5}} - 1 \right]} \bigg/ \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

47-56	15-24	Heading (10 Bit)	82-88	50-56	Diferencia de Altitud Barométrica (7 Bits)
57	25	Tipo Velocidad Respecto al aire (1 Bit)			

5. Mensaje ADS-B de estado del blanco (Referencia [18] páginas 104-115). (Véase Tabla 14)

Tabla 14: Mensaje ADS-B Estado del Blanco

Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje
33-37	1-5	Tipo Mensaje (5 Bits)	76	44	NIC _{BARO} (1 Bit)
38-39	6-7	Subtipo Mensaje (2 Bits)	77-78	45-46	SIL
40	8	SIL (1 Bit)	79	47	Estado de MCP/FCU (1 Bit)
41	9	Tipo de Altitud Seleccionada (1 Bit)	80	48	Estado del piloto automático (ON/OFF) (1 Bit)
42-52	10-20	Altitud Seleccionada MCP/FCU o FMS (11 Bits)	81	49	Estado del modo VNAV (ON/OFF) (1 Bit)
53-61	21-29	Escenario de Presión Barométrica (menos 800 mbar) (9 Bits)	82	50	Modo Mantenimiento de Altitud Activado (1 Bit)
62	30	Estado del Heading seleccionado (1 Bit)	83	51	Reservado para ADS-R (1 Bit)
63	31	Signo del Heading seleccionado (1 Bit)	84	52	Modo aproximación (1 Bit)
64-71	32-39	Heading seleccionado (8 Bits)	85	53	TCAS Disponible (1 Bit)
72-75	40-43	NAC _p (4 Bits)	86-88	54-56	Reservado (3 Bits)

6. Mensaje ADS-B del estado operacional de la aeronave (Referencia [18] páginas 115-137).

Tabla 15: Mensaje ADS-B del estado operacional de la aeronave, subtipo 1

Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits "ME"	Nombre campo mensaje
33-37	1-5	Tipo Mensaje (5 Bits)	77-80	45-48	NAC _p (4 Bits)
38-40	6-8	Subtipo mensaje (3 Bits)	81-82	49-50	GVA (2 Bits)
41-52	9-20	Código Clase Capacidad (CC) (16 Bits)	83-84	51-52	SIL (2 Bits)
53-56	21-24		85	53	NIC _{BARO} (1 Bit)
57-72	25-40	Código Modo Operacional (OM) (16 Bits)	86	54	HRD (1 Bit)
73-75	41-43	Versión Número MOPS (3 Bits)	87	55	Soporte SIL (1)

76	44	Soporte-A NIC (1 Bit)	88	56	Reservado (1 Bit)
----	----	-----------------------	----	----	-------------------

Tabla 16: Mensaje ADS-B del estado operacional de la aeronave, subtipo 2

Bits Mensaje	Bits “ME”	Nombre campo mensaje	Bits Mensaje	Bits “ME”	Nombre campo mensaje
33-37	1-5	Tipo Mensaje (5 Bits)	77-80	45-48	NAC _p (4 Bits)
38-40	6-8	Subtipo mensaje (3 Bits)	81-82	49-50	Reservado (2 Bits)
41-52	9-20	Código Clase Capacidad (CC) (16 Bits)	83-84	51-52	SIL (2 Bits)
53-56	21-24	Código L/W (4 Bits)	85	53	TRK/HDG (1 Bit)
57-72	25-40	Código Modo Operacional (OM) (16 Bits)	86	54	HRD (1 Bit)
73-75	41-43	Versión Número MOPS (3 Bits)	87	55	Soporte SIL (1)
76	44	Soporte-A NIC (1 Bit)	88	56	Reservado (1 Bit)

7. Mensaje ADS-B de estado del *Squitter* Extendido de la aeronave (Referencia [18] páginas 137-140). El presente mensaje se puede clasificar a su vez en dos, cuyas características pueden observarse en la Tabla 17 y Tabla 18.

Tabla 17: Mensaje ADS-B estado Squitter Extendido, subtipo 1

Bits Mensaje	33-37	38-40	41-43	44-56	57-88
Bits “ME”	1-5	6-8	9-11	12-24	25-56
Nombre campo mensaje	Código Tipo Mensaje (5 Bits)	Subtipo de Mensaje (3 Bits)	Estado prioritario/Emergencia (3 Bits)	Código Modo A (13 Bits)	Reservados (45 Bits)

Tabla 18: Mensaje ADS-B Estado Squitter Extendido, Subtipo 2

Bits Mensaje	33-37	38-40	41-54	55-58	59	60	61-62	63-88
Bits “ME”	1-5	6-8	9-22	23-26	27	28	29-30	31-56
Nombre campo mensaje	Código Tipo Mensaje (5 Bits)	Subtipo de Mensaje (3 Bits)	ARA (14 Bits)	RACs (4 Bits)	RA Terminada (1 Bit)	MTE (1 Bit)	TTI (2 Bits)	TID (26 Bits)

Anexo 2 Campos de vientos Reales

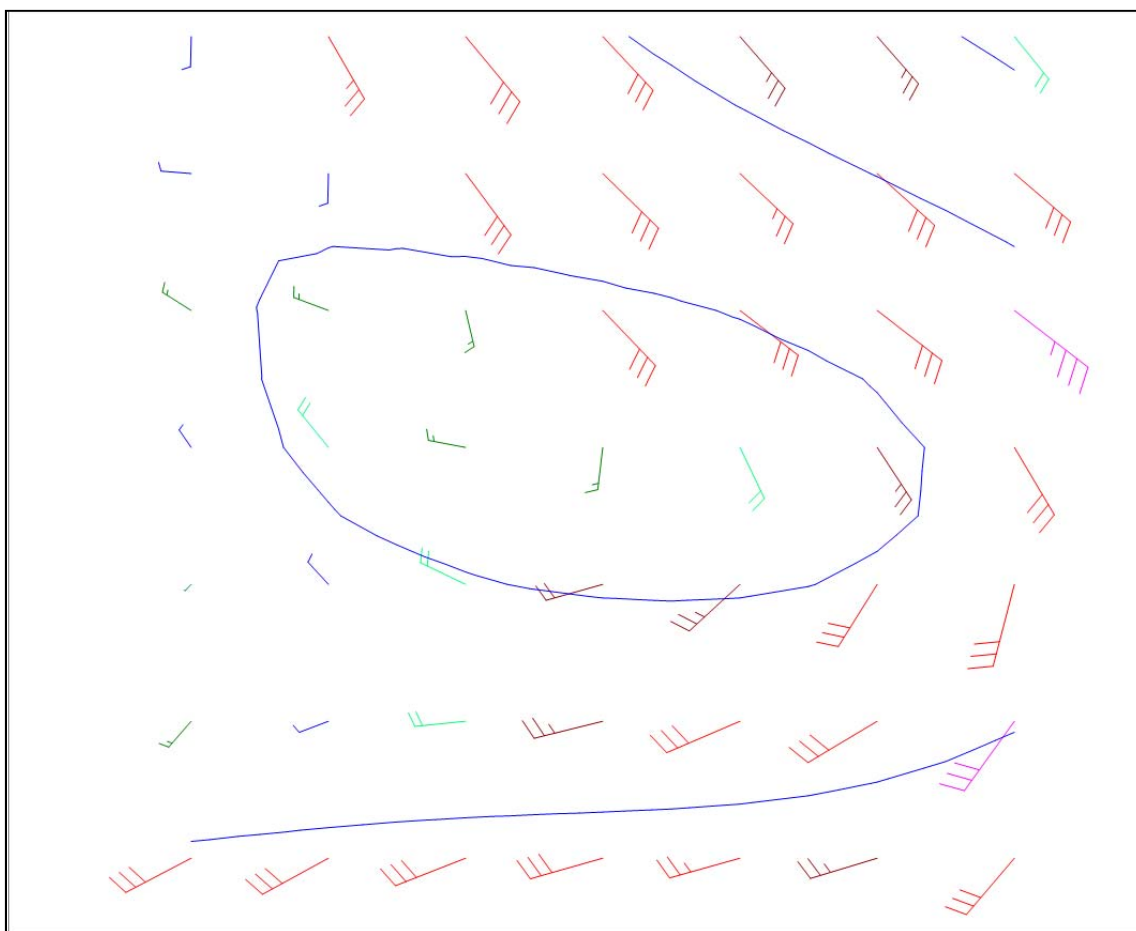


Figura 82: Campo de vientos Real más Turbulento

Tabla 19: Puntos de observación Campo de viento real más turbulento

Punto	Longitud (°)	Latitud (°)	Modulo \vec{v} (Knots)	Dirección (°)	Presión (Milibar)
1	58.9	-17.5	11.9	192	992.19
2	58.9	-16.5	27.2	151	993.13
3	58.9	-15.5	31	139	994.35
4	58.9	-14.5	27.5	137	995.46

5	58.9	-13.5	26.2	138	997.06
6	58.9	-12.5	24.3	137	998.80
7	58.9	-11.7	22.1	139	999.98
8	57.9	-17.5	11.5	274	992.07
9	57.9	-16.5	13.5	186	992.26
10	57.9	-15.5	27.7	143	992.67
11	57.9	-14.5	28.7	134	993.38
12	57.9	-13.5	28	132	994.40
13	57.9	-12.5	30	131	995.61
14	57.9	-11.7	29	130	996.96
15	56.9	-17.5	13.1	308	992.14
16	56.9	-16.5	13.6	285	991.70
17	56.9	-15.5	16.4	171	991.42
18	56.9	-14.5	27	137	991.44
19	56.9	-13.5	27.3	128	992
20	56.9	-12.5	30.9	129	992.95
21	56.9	-11.7	34.2	130	994.10
22	55.9	-17.5	8.5	323	992.39
23	55.9	-16.5	17.7	318	991.82
24	55.9	-15.5	15.4	274	991.31
25	55.9	-14.5	17.8	195	990.99
26	55.9	-13.5	21.5	173	991.11
27	55.9	-12.5	24.7	161	991.82
28	55.9	-11.7	29.2	161	992.92
29	54.9	-17.5	4.8	236	993.06
30	54.9	-16.5	11.5	303	992.76
31	54.9	-15.5	19.1	284	992.46
32	54.9	-14.5	24.1	250	992.25
33	54.9	-13.5	27.7	231	992.34
34	54.9	-12.5	29.1	216	992.91
35	54.9	-11.7	32	201	993.92
36	53.9	-17.5	16	230	994.43
37	53.9	-16.5	16.1	251	994.57
38	53.9	-15.5	21.7	260	994.64
39	53.9	-14.5	27.8	254	994.68
40	53.9	-13.5	29.7	247	994.88
41	53.9	-12.5	29.3	239	995.55
42	53.9	-11.7	31	218	996.29
43	53.2	-17.5	26.9	241	995.88
44	53.2	-16.5	27	243	996.26
45	53.2	-15.5	27.4	251	996.62
46	53.2	-14.5	28.1	254	996.81
47	53.2	-13.5	27.5	254	997.01
48	53.2	-12.5	26.2	247	997.53
49	53.2	-11.7	28.2	221	998.52

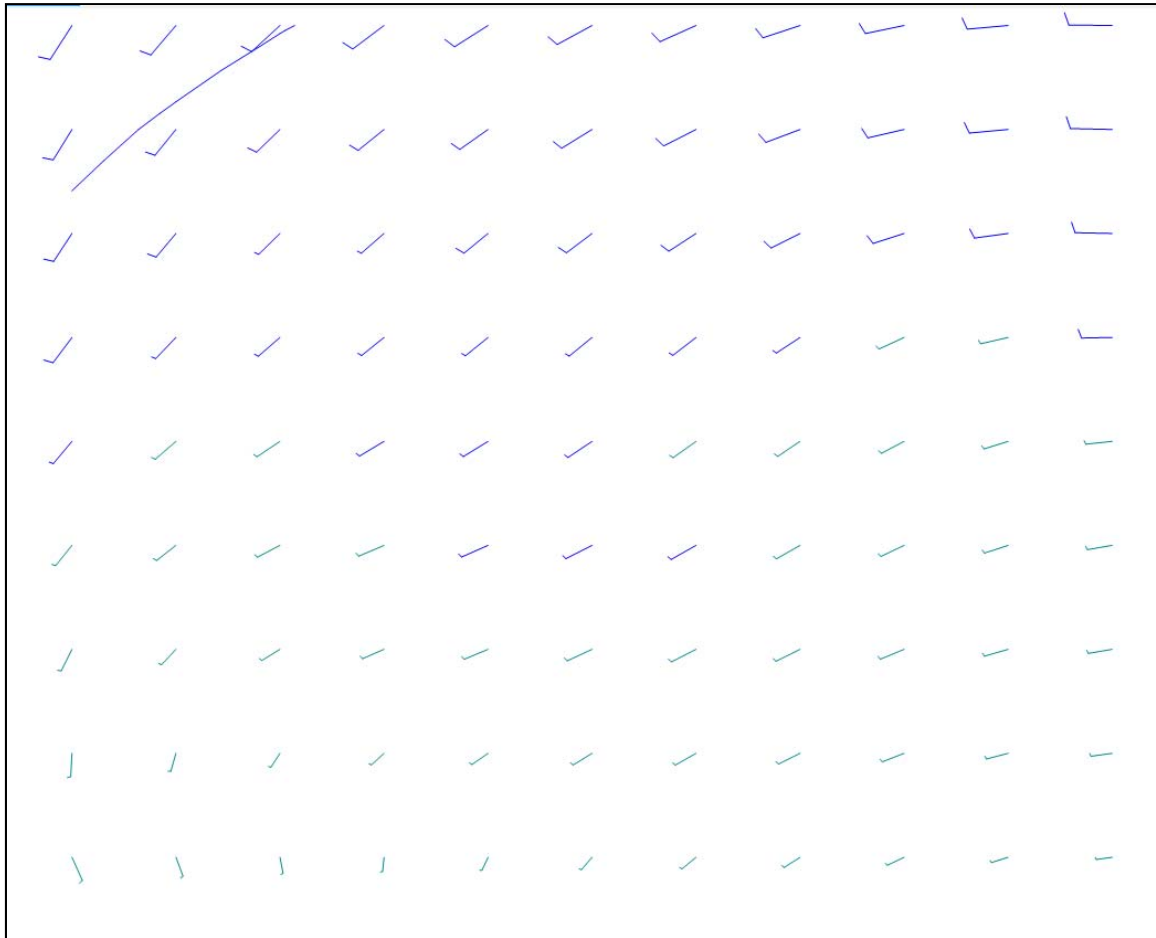


Figura 83: Campo de vientos Real más Laminar

Tabla 20: Puntos de observación Campo de vientos más laminar

Punto	Longitud (°)	Latitud (°)	Modulo \vec{v} (Knots)	Dirección (°)	Presión (Milibar)
1	28.4	-46.7	4.94	212	1015.7
2	28.4	-46.3	4.78	219	1015.9
3	28.4	-45.8	4.73	216	1016
4	28.4	-45.3	4.78	231	1016.1
5	28.4	-44.8	4.89	236	1016.3
6	28.4	-44.3	4.94	240	1016.3
7	28.4	-43.8	4.94	244	1016.4
8	28.4	-43.3	4.94	250	1016.4
9	28.4	-42.9	4.99	256	1016.4
10	28.4	-42.3	5.14	263	1016.4
11	28.4	-41.9	5.4	269	1016.3
12	27.8	-46.7	4.42	212	1016
13	27.9	-46.3	4.22	218	1016.1
14	27.9	-45.8	4.06	225	1016.3
15	27.9	-45.3	4.11	230	1016.4
16	27.9	-44.8	4.27	233	1016.6
17	27.9	-44.3	4.42	237	1016.7

18	27.9	-43.8	4.53	241	1016.8
19	27.9	-43.3	4.58	247	1016.8
20	27.9	-42.8	4.63	254	1016.9
21	27.9	-42.3	4.83	262	1016.8
22	28	-41.9	5.14	269	1016.7
23	27.4	-46.7	4.17	214	1016.1
24	27.4	-46.3	3.91	220	1016.3
25	27.4	-45.8	3.81	225	1016.4
26	27.4	-45.3	3.81	229	1016.6
27	27.4	-44.8	3.86	230	1016.8
28	27.4	-44.3	3.96	232	1017
29	27.4	-43.8	4.06	235	1017
30	27.4	-43.3	4.06	241	1017.1
31	27.4	-42.8	4.06	249	1017.1
32	27.5	-42.3	4.22	259	1017.1
33	27.5	-41.9	4.53	268	1017
34	26.9	-46.7	3.91	218	1016.3
35	26.9	-46.3	3.7	224	1016.4
36	26.9	-45.8	3.65	230	1016.7
37	26.9	-45.3	3.65	232	1016.8
38	26.9	-44.8	3.7	232	1017
39	26.9	-44.3	3.7	232	1017.2
40	26.9	-43.8	3.7	233	1017.3
41	26.9	-43.3	3.6	236	1017.3
42	26.9	-42.8	3.5	243	1017.3
43	26.9	-42.3	3.55	254	1017.3
44	27	-41.8	3.8	266	1017.1
45	26.4	-46.7	3.6	220	1016.5
46	26.4	-46.2	3.45	229	1016.7
47	26.4	-45.8	3.5	236	1016.8
48	26.4	-45.3	3.6	240	1017.1
49	26.4	-44.8	3.65	240	1017.2
50	26.4	-44.3	3.7	238	1017.4
51	26.4	-43.8	3.6	236	1017.5
52	26.4	-43.3	3.45	237	1017.5
53	26.4	-42.8	3.29	242	1017.5
54	26.4	-42.3	3.24	251	1017.5
55	26.4	-41.8	3.34	261	1017.4
56	25.9	-46.7	3.24	217	1016.8
57	25.9	-46.3	3.09	229	1016.9
58	25.9	-45.8	3.14	240	1017.1
59	25.9	-45.3	3.39	246	1017.2
60	25.9	-44.8	3.6	246	1017.4
61	25.9	-44.3	3.65	244	1017.5
62	25.9	-43.8	3.65	241	1017.6
63	25.9	-43.3	3.5	241	1017.6
64	25.9	-42.8	3.29	244	1017.6
65	25.9	-42.3	3.19	250	1017.6
66	25.9	-41.8	3.19	258	1017.5

67	25.4	-46.7	3.03	202	1017.4
68	25.4	-46.2	2.67	217	1017.2
69	25.4	-45.8	2.62	233	1017.3
70	25.4	-45.3	2.88	243	1017.4
71	25.4	-44.8	3.14	246	1017.6
72	25.4	-44.3	3.34	244	1017.7
73	25.4	-43.8	3.45	243	1017.7
74	25.4	-43.3	3.39	243	1017.7
75	25.4	-42.8	3.24	247	1017.7
76	25.4	-42.3	3.09	253	1017.7
77	25.4	-41.8	3.03	259	1017.6
78	24.9	-46.7	3.03	176	1017.3
79	24.9	-46.2	2.42	188	1017.5
80	24.9	-45.7	2.11	205	1017.6
81	24.9	-45.2	2.11	220	1017.7
82	24.9	-44.7	2.42	231	1017.7
83	24.9	-44.3	2.67	235	1017.8
84	24.9	-43.8	2.88	238	1017.8
85	24.9	-43.3	2.98	242	1017.8
86	24.9	-42.8	2.93	247	1017.8
87	24.9	-42.3	2.78	254	1017.8
88	24.9	-41.8	2.67	261	1017.7
89	24.5	-46.7	3.19	157	1017.5
90	24.5	-46.2	2.52	162	1017.6
91	24.5	-45.7	2.06	172	1017.7
92	24.5	-45.2	1.85	189	1017.8
93	24.5	-44.7	1.85	207	1017.8
94	24.5	-44.2	2.11	221	1017.9
95	24.5	-43.7	2.31	230	1017.9
96	24.5	-43.2	2.42	237	1017.9
97	24.5	-42.7	2.37	244	1017.8
98	24.5	-42.2	2.21	252	1017.8
99	24.5	-41.8	2.06	261	1017.8

Anexo 3

Programa Matlab

Modelo de viento imponiendo la velocidad del viento en los nodos

```
%CON MALLADO TURBULENTO y selección mediante rand de las cc

close all
clear all
clc

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calculo de polinomio de Phi, u,v%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

syms x y
orden=input('introduzca el ORDEN DE PHI ='); %ORDEN ECUACIÓN DE PHI
r=0;
for i=0:orden %exponente de x
    for j=0:i; %exponente de y
        r=r+1;
        pphi(r)=x^(i-j)*y^(j);
    end
end
pphi
u=diff(pphi,y)
v=-diff(pphi,x)

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%MALLADO COMPROBACIÓN%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

cc = input('Introduzca "1" si MALLADO TURBULENTO o "2" si es MALLADO LAMINAR el número de puntos de c.contorno ='); % Selección tipo
Mallado
if cc==1 % Llamar al mallado turbulento
    Mturbulento
elseif cc==2 % Llamar al mallado laminar
    Mlaminar
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE MATRIZ A%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

p = input('Introduzca el número de puntos de c.contorno, máximo: 49 MALLADO TURBULENTO y 99 MALLADO LAMINAR ='); %PUNTOS DE CONCIONES DE CONTORNO

Tam_x = size(x_d); %Me da un vector en el que el primer termino son las filas totales del vector y el otro las columnas

%Creación de un vector aleatorio entre 1 y el número de FILAS de x_d
```

```

b0 = Tam_x(1)*Tam_x(2);           %El valor máximo de puntos posibles
de ser condición de contorno
R0 = Cond_contorno(b0,p);         % Llamar para elegir los puntos
aleatorios de las condiciones de contorno

```

```

function R0=Cond_contorno(b0,p)
%R0=Cond_contorno(b,p)
% b es nº cond de contorno
% p es nº de puntos
if(p>b0)
    p=b0;
    disp(' ')
    disp(['ERROR el nº de puntos de c.contorno no puede ser mayor de '
num2str(b) ' se cogerán ' num2str(b) ' puntos.'])
    disp(' ')
end

v=1:b0;
R0=[];
for n=1:p
    r=ceil((b0+(1-eps)-n)*rand(1,1)); % Crea un random entre 0 y 1 y lo
multiplica por el número de puntos de cc + (1-eps) debido a que como
vamos a redondear al entero superior y el -n es para que empiece en
48,9999 (turbulento) y vaya restando uno según vayamos escogiendo uno a
uno el vector de cc y el ceil es para redondear al entero superior y así
todos los número tienen la misma probabilidad de salir
    R0(n)=v(r); % Introduce el nº de v en el vector de
cc R
    v(r)=[]; % Elimina la componente del vector v
que se ha elegido para que no pueda repetir numero de cc

end
R0=sort(R0); % Ordena R de menos a mayor

```

```

%para seleccionar las condiciones de contorno
B_0=0;%para contar
for j=1:Tam_x(1)
    for i=1:Tam_x(2)
        B_0 = B_0+1;
        Pto_x(B_0)= x_d(j,i); %Para colocar los puntos reales en un
vector fila empezando por la parte superior izquierda y terminando por la
parte inferior derecha
        Pto_y(B_0) = y_d(j,i);
        Ur_pto(B_0)= u_r(j,i); %Para colocar las velocidades reales
en un vector fila empezando por la parte superior izquierda y terminando
por la parte inferior derecha
        Vr_pto(B_0)= v_r(j,i);
    end
end

%Crear la matriz a
for j=1:length(R0)
    x = Pto_x(R0(j)); %Introduzco el valor de x
    y = Pto_y(R0(j)); %Introduzco el valor de la y
    x_c(j) = x; %Para guardar en un vector las
componentes x de las cond de contorno

```

```

        y_c(j) = y; %Para guardar en un vector las
componentes y de las cond de contorno
        u_c(j) = Ur_pto(R0(j)); %Introduzco en un vector fila las u
de las condi contorno
        v_c(j) = Vr_pto(R0(j)); %Introduzco en un vector fila las v
de las condi contorno
        a(j,:) = u; %Introduzco en la matriz el vector u
(vector fila de monomios)desde el principio
        a(p+j,:) = v; %Introduzco en la matriz el vector v
(vector fila de monomios)desde el final de las u
        b(j,:) = eval(a(j,:)); %evalúo la parte de las u
        b(p+j,:)= eval(a(p+j,:)); %evalúo la parte de las v
end
a = b(:,2:end); %eliminando la primera columna de
ceros

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO DE LOS COEFICIENTES%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Para poner en el vector R las condiciones de contorno formadas primero
por todas las u y luego todas las v.
for i=1:p
    R(i,1) = u_c(i);
    R(p+i,1)= v_c(i);
end

%Elegir la matriz de ponderación
K = 1;
for j=1:length(Pto_x)
    x0(j) = Pto_x(j); %punto de aplicación del método de
    GALERKIN
    y0(j) = Pto_y(j);
    dmI = 4; %Radio de influencia
    alfa= 1.5; %debe estar entre 1 y 2 ambos
    incluidos
    sup(1) = max(max(x_d))-min(min(x_d));
    sup(2) = max(max(y_d))-min(min(y_d));
    cl = max(max(sup)); %distancia representativa del Área de
análisis
    c = alfa*cl;
    for i=1:length(R0)
        dI(i) = sqrt((x0(j)-x_c(i))^2+(y0(j)-y_c(i))^2);
        if dI(i)<dmI || dI(i)==dmI
            w(i,i) = (exp(-(dI(i)/c)^(2*K))-exp(-(dmI/c)^(2*K)))/(1-
exp(-(dmI/c)^(2*K)));
            w(p+i,p+i)= (exp(-(dI(i)/c)^(2*K))-exp(-(dmI/c)^(2*K)))/(1-
exp(-(dmI/c)^(2*K)));
        else
            w(i,i) = 0;
            w(p+i,p+i)= 0;
        end
    end
end

%Calculo de la matriz de coeficientes
Ag = a'*w*a; %ecuación 6.9 del doc Estudio de dos
métodos sin mall para la resolución de ecuaciones elípticas.
Hg = a'*w;
Cnm = Ag^(-1)*Hg*R;
Pse_inv = (Ag^(-1)*Hg); %MATRIZ PSEUDO-INVERSA
D = Pse_inv*Pse_inv';
Det_D(j)= det(D);

```

```

DOP(j) = sqrt(sum(diag(D)));
CCC(:,j)= Cnm;
pu_t(j) = u(2:end)*Cnm;           %Para almacenar el la estimación de
la u
pv_t(j) = v(2:end)*Cnm;           %Para almacenar el la estimación de
la v
PHI(j) = pphi(2:end)*Cnm;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%CALCULO V TEORICO%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

L00 = 0;                           %Contador
for j=1:Tam_x(1)                   %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2)               %Columnas
        x      = x_d(j,i);
        y      = y_d(j,i);
        L00    = L00+1;
        u_t(j,i) = pu_t(L00);
        v_t(j,i) = pv_t(L00);
        U(j,i)  = eval(u_t(j,i));
        V(j,i)  = eval(v_t(j,i));
        phi(j,i) = eval(PHI(L00));
    end
end
u_t = U;                           %Para volver a la notación original
después de evaluar el polinomio
v_t = V;                           %Para volver a la notación original
después de evaluar el polinomio

%DESDIMENSIONALIZAR
x_d = x_d*D0;
y_d = y_d*D0;
x_c = x_c*D0;
y_c = y_c*D0;
u_r = u_r*V0;
v_r = v_r*V0;
u_t = u_t*V0;
v_t = v_t*V0;
P0 = 101325;                       %Presión en el nivel medio del mar en
Pa
Phi = phi*P0;
u_Pre = u_t;
v_Pre = v_t;

figure(6)
surf(x_d,y_d,phi)
colorbar
title('Presión teorica')
xlabel('x')
ylabel('y')

%quiver:
figure(1)
quiver(x_d,y_d,u_r,v_r)
hold on
quiver(x_d,y_d,u_t,v_t,'r')
grid
for i=1:p                           %para representar los puntos de las
C. de contorno

```



```

plot(x_c(i),y_c(i),'*k')
end
title('vientos con sesgo')
xlabel('x')
ylabel('y')

%Cálculo del vector error=Vteorica-Vreal
for j=1:Tam_x(1) %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2) %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        err_x(j,i) = u_t(j,i)-u_r(j,i);
        err_y(j,i) = v_t(j,i)-v_r(j,i);
        mod_err(j,i)= sqrt(err_x(j,i)^2+err_y(j,i)^2);
    end
end
figure(2)
surf(x_d,y_d,mod_err)
colorbar
title('Modulo del error con sesgo')
xlabel('x')
ylabel('y')

%Representación de los vectores error
figure(3)
L=0; %para ver cuántos errores son
representados
for j=1:Tam_x(1) %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2) %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        plot(err_x(j,i),err_y(j,i),'*k')
        hold on
        L = L+1; %numero de errores representados
    end
end
grid
title('Representación de los vectores error')
xlabel('x')
ylabel('y')

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%HISTOGRAMA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

N = 20; %Numero de filas de celdillas
M = 20; %Numero de columnas de celdillas
C_x = 10; %punto mayor de x en la malla del
plano del error
C_y = 10; %punto mayor de y en la malla del
plano del error
l = 0; %para contar los puntos
A = zeros(M,N); %para contar las veces que se repite
cada tramo
for j=1:Tam_x(1) %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2) %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        err_x(j,i) = u_t(j,i)-u_r(j,i);
        err_y(j,i) = v_t(j,i)-v_r(j,i);
        for m=1:N %Para evaluar el error en cada fila
de la malla del plano del error

```

```

        for k=1:M %Para evaluar el error en cada
columna de la malla del plano del error
            if err_x(j,i)>=-C_x+(k-1) && err_x(j,i)<=-(C_x-1)+(k-1) &&
err_y(j,i)<=C_y-(m-1) && err_y(j,i)>=(C_y-1)-(m-1)
                A(m,k)=A(m,k)+1;
                L = l+1; %Para hacer un contador de todas las
veces que se cumple el if
            end
        end
    end
end
end
end

```

%Representación del histograma

```

for j=1:M %fila
    for i=1:N %columna
        ERR_x(j,i) = -C_x+(i-1); %para que en todas las y tenga la
misma fila ya que la x es la misma para y cte
        ERR_y(j,i) = C_y-(j-1);
    end
end

```

%%
%%Calculo MEDIA%%

```

SumX = 0; %Para calcular la componente x de la
media
SumY = 0; %Para calcular la componente y de la
media
L2 = 0; %para hacer un contador
for j=1:Tam_x(1) %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2) %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        SumX = SumX+err_x(j,i);
        SumY = SumY+err_y(j,i);
        L2 = L2+1; %contador
    end
end
Mu_x = SumX/L2;
Mu_y = SumY/L2;

```

%%
%%Cáculo de la ESPERANZA (E[eps_v*eps_v^t])%%

```

Sum_x2 = 0; %Para calcular la componente x de la
varianza
Sum_y2 = 0; %Para calcular la componente y de la
varianza
Sum_xy2= 0; %Para calcular la componente xy de la
varianza
L4 = 0; %para hacer un contador
for j=1:Tam_x(1) %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2) %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        Sum_x2 = Sum_x2+err_x(j,i)^2;
        Sum_y2 = Sum_y2+err_y(j,i)^2;
        Sum_xy2= Sum_xy2+err_x(j,i)*err_y(j,i);
        L4 = L4+1; %contador
    end
end

```

```

end
end
Var_xx = Sum_x2/L4
Var_yy = Sum_y2/L4
Var_xy = Sum_xy2/L4

%Cálculo del VALOR MEDIO de la velocidad del viento REAL
L5      = 0;
sumU_r= 0;
sumV_r= 0;
for j=1:Tam_x(1)                                %Filas sacadas del numero de filas de
la matriz x_d
    for i=1:Tam_x(2)                                %Columnas sacadas del numero de
columnas de la matriz x_d
        L5      = L5+1;                                %contador
        sumU_r= u_r(j,i)+sumU_r;
        sumV_r= v_r(j,i)+sumV_r;
    end
end
MedVel = sqrt((sumU_r^2+sumV_r^2))/L5

```

Anexo 4 Programa Matlab

Modelo de viento imponiendo la presión en los nodos

```
%Modelo EFGM empleando la presión en los nodos

close all
clear all
clc

tic                                     % Pone el conómetro de matlab en marcha
format long
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%MALLADO COMPROBACIÓN%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Mall=input('Introduzca 1 LAMINAR, Introduzca 2 TURBULENTO: ');
if Mall==1
    Mlaminar                                     % Llama a Mturbulento.m donde está el
    mallado
elseif Mall==2
    Mturbulento
end
clear teta teta_r Rp_m Rt fac fac2 i j mod omega p_c phi_m ro Mall
% Elimino esas variables para limpiar el workspace
Tam_x = size(x_d);                             % Me da un vector en el que el primer
termino son las filas totales del vector y el otro las columnas
b0     = Tam_x(1)*Tam_x(2);                     % El valor máximo de puntos posibles
de ser condición de contorno
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%calculo de polinomio de Phi, u,v%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ADIMENSIONALIZANDO

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%ADIMENSIONALIZANDO

x_d = x_d/D0;
y_d = y_d/D0;
u_r = u_r/V0;
v_r = v_r/V0;
pr   = pr/P0;
coef= coef/((V0*D0)/P0);                       % coef=1/(ro*p_c) tiene unidades de
1/(kg/(m^3*s)) y ((V0*D0)/P0) tiene unidades de 1/(kg/(m^3*s)) tb

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms x y
oo = input('Introduzca el orden de PHI: ');     % Selección del orden
de PHI
r   = 0;
for i=0:oo                                       % Variación del orden, Orden=Orden
    exponente de x+ Orden exponente de y
        for j=0:i;                             % exponente de y, que va a evaluar
            desde 0 hasta el maximo orden (i)
```

```

        r=r+1;
        ppr(r) = x^(i-j)*y^(j);          % En realidad esta es p^T la
traspuesta de la ecuación del TInvestigación Ec5
    end
end
clear i j oo r                          % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
elem = length(ppr(:));
ppr_y = diff(ppr,y);                    % Derivada de p con respecto a y
ppr_x = diff(ppr,x);                    % Derivada de p con respecto a x
%para poner los puntos del mallado en línea
B_0=0;                                  %para contar
Pto_x = zeros (1,b0);
Pto_y = zeros (1,b0);
ppr_pto = zeros (1,b0);
for j=1:Tam_x(1)
    for i=1:Tam_x(2)
        B_0 = B_0+1;
        Pto_x(B_0) = x_d(j,i);          % Para colocar los puntos reales
en un vector fila empezando por la parte superior izquierda y terminando
por la parte inferior derecha
        Pto_y(B_0) = y_d(j,i);
        ppr_pto(B_0)= pr(j,i);
    end
end
clear i j Tam_x B_0                    % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%ppr ppr_y ppr_x en todos los puntos del mallado%%%%%%%%
ppr_e = zeros(length(Pto_x),elem);
ppr_x_e = zeros(length(Pto_x),elem);
ppr_y_e = zeros(length(Pto_x),elem);
for j=1:length(Pto_x)
    x = Pto_x(j);
    y = Pto_y(j);
    ppr_e(j,:) = eval(ppr(:));           % j=fila mallado, i=columna
mallado, 1er:=orden de ppr, 2º:=elemento del monomio
    ppr_y_e(j,:) = eval(ppr_y(:));
    ppr_x_e(j,:) = eval(ppr_x(:));
end
clear i j x y                          % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%w w_x w_y para todos los puntos del mallado y para todo
cc%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
K = 1;
dmI = 4;                               % Radio de influencia
alfa = 1.5;                             % debe estar entre 1 y 2
ambos incuidos
sup(1)= max(max(x_d))-min(min(x_d));
sup(2)= max(max(y_d))-min(min(y_d));
cl = max(max(sup));                      % distancia representativa
del Área de análisis
c = alfa*cl;
dI = zeros (b0,b0);
dI_x = zeros (b0,b0);
dI_y = zeros (b0,b0);
w = zeros (b0,b0);
w_x = zeros (b0,b0);
w_y = zeros (b0,b0);
for j=1:length(Pto_x)
    for i=1:length(Pto_x)

```

```

        dI(j,i) = sqrt((Pto_x(j)-Pto_x(i))^2+(Pto_y(j)-Pto_y(i))^2);
% (j,i)Coordenada del punto donde estoy evaluando la función, (jj,ii)
Coordenada del punto cc
        dI_x(j,i)= (Pto_x(j)-Pto_x(i))/(dI(j,i));
        dI_y(j,i)= (Pto_y(j)-Pto_y(i))/(dI(j,i));
        if j==i
            dI_x(j,i) = 0;
            dI_y(j,i) = 0;
        end
        w(j,i) = (exp(-(dI(j,i)/c)^(2*K))-exp(-(dmI/c)^(2*K)))/(1-exp(-(dmI/c)^(2*K)));
        w_x(j,i) = ((-2*K)*(dI(j,i)/(c^2))*dI_x(j,i)*exp(-(dI(j,i)/c)^(2*K)))/(1-exp(-(dmI/c)^(2*K)));
        w_y(j,i) = ((-2*K)*(dI(j,i)/(c^2))*dI_y(j,i)*exp(-(dI(j,i)/c)^(2*K)))/(1-exp(-(dmI/c)^(2*K)));
    end
end
clear i j K dmI alfa sup cl c % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
%Creación de un vector aleatorio entre 1 y el numero de FILAS de x_d
pp = input('Introduzca el numero de puntos de observación: ');
% Numero de puntos condicion de contorno
R0 = Cond_contorno(b0,pp);

P = zeros (length(R0),elem);
ws = zeros (b0,length(R0));
ws_x= zeros (b0,length(R0));
ws_y= zeros (b0,length(R0));
R = zeros (length(R0),1);
x_c = zeros(1,length(R0));
y_c = zeros(1,length(R0));
for i=1:length(R0)
    P(i,:) = ppr_e(R0(i),:); % Matriz de monomios,
    evaluados por filas segun pto cc. Ec 10 MI Proyecto
    ws(:,i) = w(:,R0(i));
    ws_x(:,i) = w_x(:,R0(i));
    ws_y(:,i) = w_y(:,R0(i));
    R(i,1) = pr(R0(i));
    x_c(i) = Pto_x(R0(i));
    y_c(i) = Pto_y(R0(i));
end
clear i % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
Sum = 0;
W = zeros(length(R0),length(R0));
W_x = zeros(length(R0),length(R0));
W_y = zeros(length(R0),length(R0));
DETERM = zeros(1,b0);
pres = zeros(size(x_d));
u_t = zeros(size(x_d));
v_t = zeros(size(x_d));
for j=1:size(x_d,1)
    for i=1:size(x_d,2)
        Sum=Sum+1;
        for ii=1:length(R0)
            W(ii,ii) = ws(Sum,ii); % Matriz de ponderación para
cada R0 Ec 11 MI Proyecto
            W_x(ii,ii)= ws_x(Sum,ii);
            W_y(ii,ii)= ws_y(Sum,ii);
        end
        A = P'*W*P; % Ec 13 MI Proyecto
    end
end

```

```

B      = P'*W;                                % Ec 13 MI Proyecto
A_x = P'*W_x*P;
A_y = P'*W_y*P;
B_x = P'*W_x;
B_y = P'*W_y;

ppr_ev(1,:) = ppr_e(Sum,:);
ppr_x_ev(1,:)= ppr_x_e(Sum,:);
ppr_y_ev(1,:)= ppr_y_e(Sum,:);

A_1      = inv(A);
PHI      = ppr_ev*(A\B);
dPHI_x = ppr_x_ev*(A\B)+(ppr_ev/A)*(B_x-(A_x)*(A\B));
% Derivada de la PHI anterior respecto de x
dPHI_y = ppr_y_ev*(A\B)+(ppr_ev/A)*(B_y-(A_y)*(A\B));
% Derivada de la PHI anterior respecto de y

pres(j,i)= PHI*R;                            % presión adimensionalizada
u_t(j,i) = -(coef)*(dPHI_y*R);                % Componente u de la velocidad
del viento estimada en función de x e y Adimensionalizado
v_t(j,i) = (coef)*(dPHI_x*R);                % Componente v de la velocidad
del viento estimada en función de x e y Adimensionalizado
end
end
clear i j ii Sum                             % Elimino esas variables para
limpiar el workspace
DESDIMENSIONALIZAR

%DESDIMENSIONALIZAR
x_d = x_d*D0;                                %
mallado de medidas reales
y_d = y_d*D0;
u_r = u_r*V0;                                %
velocidad real
v_r = v_r*V0;
u_t = u_t*V0;                                %
velocidad real
v_t = v_t*V0;
x_c = x_c*D0;
y_c = y_c*D0;
pr = pr*P0;
pres = pres*P0;
coef = coef*((V0*D0)/P0);

%Cálculo del vector error=Vteorica-Vreal
err_x = u_t-u_r;
err_y = v_t-v_r;
mod_v_r= sqrt(u_r.^2+v_r.^2);
mod_err= sqrt(err_x.^2+err_y.^2);
ERR_pre= pr-pres;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Calculo MEDIA%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Mu_x = mean(mean(err_x));
Mu_y = mean(mean(err_y));
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Cálculo de la ESPERANZA(E[eps_v*eps_v^t])%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
ESPERANZA

```

```
% Estadístico varianza
```

```
Var_xx=mean(mean(err_x.^2));  
Var_yy=mean(mean(err_y.^2));  
Var_xy=mean(mean(err_x.*err_y));
```

```
Var_xx_1=mean(mean(err_x(2:end-1,2:end-1).^2));  
Var_yy_1=mean(mean(err_y(2:end-1,2:end-1).^2));  
Var_xy_1=mean(mean(err_x(2:end-1,2:end-1).*err_y(2:end-1,2:end-1)));
```

```
Var_xx_2=mean(mean(err_x(3:end-2,3:end-2).^2));  
Var_yy_2=mean(mean(err_y(3:end-2,3:end-2).^2));  
Var_xy_2=mean(mean(err_x(3:end-2,3:end-2).*err_y(3:end-2,3:end-2)));
```

```
Var_xx_3=mean(mean(err_x(4:end-3,4:end-3).^2));  
Var_yy_3=mean(mean(err_y(4:end-3,4:end-3).^2));  
Var_xy_3=mean(mean(err_x(4:end-3,4:end-3).*err_y(4:end-3,4:end-3)));
```

```
Var_pre=mean(mean(ERR_pre.^2));
```

```
Traza=Var_xx+Var_yy;  
Traza_1=Var_xx_1+Var_yy_1;  
Traza_2=Var_xx_2+Var_yy_2;  
Traza_3=Var_xx_3+Var_yy_3;
```

```
toc
```

```
Representaciones
```

```
%Representaciones
```

```
figure(1)  
quiver(x_d,y_d,u_r,v_r)  
xlabel('x')  
ylabel('y')  
title('Campo velocidad real')
```

```
figure(2)  
quiver(x_d,y_d,u_t,v_t)  
hold on  
for i=1:length(R0) % para representar los puntos de las  
C. de contorno  
plot(x_c(i),y_c(i),'*k')  
end  
xlabel('x')  
ylabel('y')  
title('Campo velocidad estimada')
```

```
figure(3)  
mod_err=mod_err/mean(mean(mod_v_r));  
surf(x_d,y_d,mod_err)  
colorbar  
title('Campo Error velocidad/velocidad real media')  
xlabel('x')  
ylabel('y')  
zlabel('Error Velocidad estimada/Vel. real media')
```



```

figure(4)
ERR_pre=ERR_pre/mean(mean(pr));
surf(x_d,y_d,ERR_pre)
title('Error presión/presión real media')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('Error Presión estimada/pres. real media')

figure(5)
contour(x_d,y_d,pr,25)
colorbar
title('Isobaras presión real')
hold on
quiver(x_d,y_d,u_r,v_r)
xlabel('x')
ylabel('y')

figure(6)
contour(x_d,y_d,pres,25)
colorbar
title('Isobaras presión estimado')
hold on
quiver(x_d,y_d,u_t,v_t)
xlabel('x')
ylabel('y')

figure(7)
surf(x_d,y_d,pr)
colorbar
title('Presión real')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('Presión real')

figure(8)
surf(x_d,y_d,pres)
colorbar
title('Presión estimada')
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('Presión estimada')

```
